Aufgabe "Aidstest": Variante 2

Ein Aids-Schnelltest hat folgende Eigenschaften:

Wenn die Person Aids hat, dann ist der Test zu 98% positiv (und 2% negativ)

Wenn die Person nicht Aids hat, dann ist der Test zu 2% positiv (und 98% negativ)

Von 82 Mio. Deutschen sind ca 82000 krank.

Bestimme die W'keit, dass jemand gesund ist, obwohl der Test positiv ist!

Festlegung: A = Aidskrank, $\overline{A}$ = gesund

$T+$= Test positiv, $T-$ =Test negativ

$$P(A) = \frac{82000}{82Mio} = \frac{1}{1000} \qquad P(\overline{A}) = 1-P(A)=\frac{999}{1000}$$

$$P_A(T+) = 98\% = 0{,}98 \qquad P_A(T-) = 2\% = 0{,}02$$

$$P_{\overline{A}}(T-) = 98\% = 0{,}98 \qquad P_{\overline{A}}(T+) = 2\% = 0{,}02$$

Erinnerung:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Hier:

$$P_A(T+) = \frac{P(A \cap T+)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A\cap T+)= P_A(T+) \cdot P(A) = 0{,}98 \cdot 1/1000 = 98/100000$$

$$P_{\overline{A}}(T-) = \frac{P(\overline{A} \cap T-)}{P(\overline{A})} \Leftrightarrow P(\overline{A} \cap T-)=0{,}97902$$

	A	$\overline{A}$	
$T+$	$P(A\cap T+)=\frac{98}{100000}$	$P(\overline{A}\cap T+)=0{,}01998$	$P(T+)$ 0,02096
$T-$	$P(A\cap T-)=\frac{2}{100000}$	$P(\overline{A}\cap T-)=0{,}97902$	$P(T-)$ 0,97904
	$P(A)=\frac{1}{1000}$	$P(\overline{A}) = \frac{999}{1000}$	

Die eigentliche Aufgabe war ja aber folgende: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach positivem Testausgang die Person tatsächlich krank ist?

$$P_{T+}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\cap T+)}{P(T+)} = \frac{0{,}01998}{0{,}02097} = 0{,}9532442748 = ca.95\%$$

Aufgabe "Aidstest": Variante 3

Ein Aids-Schnelltest hat folgende Eigenschaften:
Wenn die Person Aids hat, dann ist der Test zu 99% positiv (und 1% negativ)
Wenn die Person nicht Aids hat, dann ist der Test zu 1% positiv (und 99% negativ)
Von 82 Mio. Deutschen sind ca 82000 krank.
Bestimme die W'keit, dass jemand gesund ist, obwohl der Test positiv ist!

Festlegung: A = Aidskrank, $\bar{A}$ = gesund
T+= Test positiv, T- =Test negativ

$$P(A) = \frac{82000}{82Mio} = \frac{1}{1000} \qquad P(\bar{A}) = 1-P(A)=\frac{999}{1000}$$

$$P_A(T+) = 99\% = 0{,}99 \qquad P_A(T-) = 1\% = 0{,}01$$

$$P_{\bar{A}}(T-) = 99\% = 0{,}99 \qquad P_{\bar{A}}(T+) = 2\% = 0{,}01$$

Erinnerung:
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Hier:
$$P_A(T+) = \frac{P(A \cap T+)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap T+) = 0{,}99/1000 = 99/100000$$

$$P_{\bar{A}}(T-) = \frac{P(\bar{A} \cap T-)}{P(\bar{A})} \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap T-) = 0{,}98901$$

	A	$\bar{A}$	
T+	$P(A\cap T+)=\frac{99}{100000}$	$P(\bar{A}\cap T+)=0{,}00999$	$P(T+)$ 0,01098
T-	$P(A\cap T-)=\frac{1}{100000}$	$P(\bar{A}\cap T-)=0{,}98901$	$P(T-)$ 0,98902
	$P(A)=\frac{1}{1000}$	$P(\bar{A}) = \frac{999}{1000}$	

Die eigentliche Aufgabe war ja aber folgende: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach positivem Testausgang die Person tatsächlich krank ist?

$$P_{T+}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\cap T+)}{P(T+)} = \frac{0{,}00999}{0{,}01098} = 0{,}909836 = \text{ca.}91\%$$