Eine Aufgabe mit verschiedenen Operatoren: Hoch- und Tiefpunkt

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{x^3}{15} - \frac{7x^2}{20} - \frac{3x}{2} + 4$.

Aufgabenstellung 1: Operator „angeben“
Geben Sie die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt an.

Lösung: $H(-1{,}5|5{,}24)$; $T(5|-3{,}92)$

Alle weiter unten folgenden Lösungen (2 – 5) sind auch zulässige Lösungen bei diesem Operator.

Aufgabenstellung 2: Operator „bestimmen“
Bestimmen Sie die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt.

Lösung:
Variante 1: Durch Untersuchung des Graphen mit dem GTR auf Hoch- und Tiefpunkte mit der unteren Grenze x = – 3 und der oberen Grenze x = 7 wurde gefunden $H(-1{,}5|5{,}24)$; $T(5|-3{,}92)$.
Variante 2: Ich habe mit dem GTR einen Punkt auf den Graphen gesetzt, diesen gezogen und dadurch gefunden, dass $H(-1{,}5|5{,}24)$; $T(5|-3{,}92)$.

Alle weiter unten folgenden Lösungen (3 – 5) sind auch zulässige Lösungen bei diesem Operator.

Aufgabenstellung 3: Operator „bestimmen“ mit Zusatz
Bestimmen Sie die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt graphisch.

Lösung wie bei Aufgabenstellung 2. In diesem Fall sind die Lösungen 4 und 5 nicht zulässig.

Aufgabenstellung 4: Operator „berechnen“
Berechnen Sie die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt.

Lösung:
Die Gleichung $f'(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{10}x - \frac{3}{2} = 0$ hat die Lösungen $x = -1{,}5 \vee x = 5$. An diesen Stellen liegen waagerechte Tangenten vor. $f''(x) = \frac{2}{5}x - \frac{7}{10}$
Da $f''(-1{,}5) = -1{,}3 < 0$, ist der Graph von f dort rechtsgekrümmt. Also gibt es einen Hochpunkt an dieser Stelle. Wegen $f(-1{,}5) \approx 5{,}24$ hat der Punkt die Koordinaten $H(-1{,}5|5{,}24)$.
Da $f''(5) = 1{,}3 > 0$, ist der Graph von f dort linksgekrümmt. Also gibt es einen Tiefpunkt an dieser Stelle. Wegen $f(5) \approx -3{,}92$ hat der Punkt die Koordinaten $T(5|-3{,}92)$.

Auch die Lösung 5 ist in diesem Fall zulässig

Aufgabenstellung 5: Operator „berechnen" mit Zusatz

Berechnen Sie die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt, so dass der Lösungsweg ohne Einsatz des GTRs nachvollziehbar ist.

Lösung:

Die Gleichung $f'(x) = 0$ ist zu lösen.

$$\frac{x^2}{5} - \frac{7}{10}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{15}{2}} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{120}{16}} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{7}{4} \pm \frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{20}{4} = 5 \vee x_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Dort liegen waagerechte Tangenten vor.

Es ist $f''(5) = \frac{2}{5} \cdot 5 - \frac{7}{10} > 0$. Also ist der Graph von f dort linksgekrümmt. Es liegt ein Tiefpunkt vor.

Wegen $f(5) = \frac{5^3}{15} - \frac{7 \cdot 5^2}{20} - \frac{3}{2} \cdot 5 + 4 = \frac{25}{3} - \frac{35}{4} - \frac{15}{2} + 4 = \frac{100-105-90+48}{12} = -\frac{47}{12}$ ist $T\left(5 \middle| -\frac{47}{12}\right)$.

Es ist $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{10} = -\frac{3}{5} - \frac{7}{10} < 0$. Also ist der Graph von f dort rechtsgekrümmt. Es liegt ein Hochpunkt vor.

Wegen $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{15} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{7}{20} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 4 = -\frac{27}{15 \cdot 8} - \frac{7 \cdot 9}{20 \cdot 4} + \frac{9}{4} + 4$

$= -\frac{9}{40} - \frac{63}{80} + \frac{9}{4} + 4 = \frac{-18-63+180+320}{80} = \frac{419}{80}$ ist $H\left(-\frac{3}{2} \middle| \frac{419}{80}\right)$.

Eine Aufgabe mit verschiedenen Operatoren: Integralrechnung

Gegeben seien die Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x) = x^3 - x$ und $g(x) = -x^3 + x^2$.

Aufgabenstellung 1: Operator „angeben"

Geben Sie die Maßzahl des Flächeninhalts an, den die Graphen von f und g einschließen.

Lösung: $A = \frac{37}{96} \approx 0{,}39$

Alle weiter unten folgenden Lösungen (2 – 5) sind auch zulässige Lösungen bei diesem Operator.

Aufgabenstellung 2: Operator „bestimmen"

Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts, den die Graphen von f und g einschließen.

Lösung:

Die Untersuchung der Graphen mit dem GTR auf Schnittstellen zeigt, dass sie sich an den drei Stellen $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ schneiden, also zwei Flächenstücke einschließen.

Die Berechnung des Flächeninhalts mit dem GTR ergibt, dass das erste Flächenstück von $x_1 = -0{,}5$ bis $x_2 = 0$ eine Maßzahl von $\frac{5}{96}$ hat, das zweite von $x_2 = 0$ bis $x_3 = 1$ hat eine Maßzahl von $\frac{1}{3}$. Also schließen die Graphen von f und g insgesamt eine Fläche mit der Maßzahl $A = \frac{5}{96} + \frac{1}{3} = \frac{37}{96}$ ein.

Alle weiter unten folgenden Lösungen (3 – 5) sind auch zulässige Lösungen bei diesem Operator.

Aufgabenstellung 3: Operator „bestimmen" mit Zusatz

Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts, den die Graphen von f und g einschließen, graphisch.

Lösung wie bei Aufgabenstellung 2. In diesem Fall sind die Lösungen 4 und 5 nicht zulässig.

Aufgabenstellung 4: Operator „berechnen"

Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts, den die Graphen von f und g einschließen.

Lösung:

Die Differenzfunktion d von f und g lautet $d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x - (-x^3 + x^2) = 2x^3 - x^2 - x$.

Die Integrationsgrenzen sind die Schnittstellen von f und g, also die Nullstellen von d. Als Lösungen der Gleichung $d(x) = 2x^3 - x^2 - x = 0$ erhält man Stellen $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$. Demnach schließen die Graphen von f und g zwei Flächenstücke ein.

Eine Stammfunktion D von d lautet $D(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$.

Man berechnet die Integrale

$$\int_{-0{,}5}^{0} d(x)dx = D(0) - D(-0{,}5) = \frac{5}{96} \quad und \quad \int_{0}^{1} d(x)dx = D(1) - D(0) = -\frac{1}{3}.$$

Also schließen die Graphen von f und g eine Fläche mit dem Inhalt $A = \frac{5}{96} + \frac{1}{3} = \frac{37}{96}$ ein.

Auch die Lösung 5 ist in diesem Fall zulässig.

Aufgabenstellung 5: Operator „berechnen“ mit Zusatz

Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts, den die Graphen von f und g einschließen, so, dass der Lösungsweg ohne Einsatz des GTRs nachvollziehbar ist.

Lösung:

Die Differenzfunktion d von f und g lautet $d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x - (-x^3 + x^2) = 2x^3 - x^2 - x$.
Die Integrationsgrenzen sind die Schnittstellen von f und g, also die Nullstellen von d.

$$d(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; 2x^3 - x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x\,(2x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x = 0 \vee x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x = 0 \vee x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \; x = 0 \vee x = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \; x = 0 \vee x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Die Graphen von f und g schließen zwei Flächenstücke ein.

Eine Stammfunktion D von d lautet $D(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$.

Man berechnet die Integrale

$$\int_{-0,5}^{0} d(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-0,5}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) = 0 - \left(-\frac{5}{96}\right) = \frac{5}{96} \text{ und}$$

$$\int_{0}^{1} d(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}1^4 - \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{2}1^2 - (0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - (0) = -\frac{1}{3}$$

Also schließen die Graphen von f und g eine Fläche mit dem Inhalt $A = \frac{5}{96} + \frac{1}{3} = \frac{37}{96}$ ein.