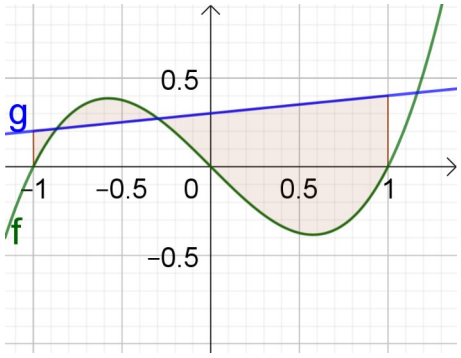
Ausgewählte Vokabeln in der Mathematik der Oberstufe

<u>gebrochene und negative Exponenten:</u>
Fall 1: Ist der Exponent einer Potenz eine Natürliche Zahl, so wird entsprechend oft multipliziert. Dies ist seit der Sekundarstufe 1 bekann. Beispiel: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Hier ist der Exponent die 3, also muss die Basis 2 dreimal mit sich selbst multipliziert werden.
Fall 2: Ist der Exponent einer Potenz negativ, so kann man die Potenz direkt als Bruch schreiben.
Beispiel $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ Aus dem Exponenten -3 verschwindet das Minus, indem man 2^3 direkt in den Nenner eines Bruches schreibt.
Fall 3: Ist der Exponent keine ganze Zahl, so sollte der Exponent zunächst als Bruch umgeschrieben werden. Der Nenner kann dann als höhere Wurzel geschrieben werden, während der Zähler wie üblich als ganzzahliger Exponent funktioniert. Beispiele:

$16^{0,5} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ oder $64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$

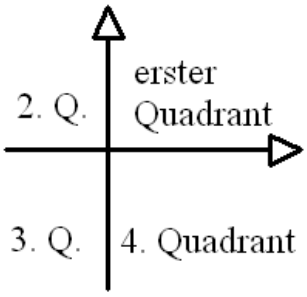
<u>Betrag, Betragsstriche</u>
Der Betrag einer Zahl ist deren (positiver) Abstand zum Ursprung. Man schreibt dazu Betragsstriche um die Zahl:
Beispiele: | 3 | = 3 | -3 | = 3 (sowohl 3 als auch -3 haben den Abstand 3 von der 0)



Beträge können bei der Berechnung von Flächen mittels Integralen hilfreich sein. Da Flächen nur positive Größen haben, kann man insbesondere mit Hilfe des Taschenrechners schnell zu Lösungen kommen.
Beispiel: Berechne die Fläche, die die beiden Graphen f und g im Intervall [-1;1] einschließen.
Problem: Von Hand müsste man zunächst die Schnittstellen bestimmen um dann drei Einzelintegrale zu berechnen. Im GTR kann man aber einfach $\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx$ berechnen (Beachte: der Integrand ist in Betragsstrichen!), denn damit sind alle Teile der Differenzfunktion auf einmal positiv, und die Schnittstellen interessieren überhaupt nicht mehr.

In der Vektorrechnung gilt: Der <u>Betrag eines Vektors</u> ist seine Länge:
$\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 5$ aber auch $\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 5$ oder $\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = 5$ oder $\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = 5$
Denn: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ aber auch $\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ etc.

<u>Koordinatensystem</u>



In einem Koordinatensystem können wir durch Punktkoordinaten Orte beschreiben. Seit der Mittelstufe bekannt sind zweidimensionale Koordinatensysteme, mit denen man z.B. jeden Punkt auf dem Papier durch zwei Koordinaten beschreiben kann. Ein Koordinatensystem hat einen <u>Ursprung</u>, also dort, wo sich die Achsen kreuzen. Dieser Ursprung hat (im zweidimensionalen) die Koordinaten (0|0). Die Reihenfolge der Koordinaten eines Punktes ist immer: Erst x-Wert ("wieviele Einheiten geht's nach rechts?"), dann y-Wert ("wieviele Einheiten geht's nach oben?"). Die Achsen heißen statt x-Achse und y-Achse in Sachzusammenhängen auch oft t-Achse und v-Achse oder ähnlich. Allgemein kann man auch von "Rechtsachse" und "Hochachse" sprechen.

Um einen Ort im Raum zu beschreiben, benötigt man aber ein dreidimensionales Koordinatensystem, d.h. für jeden Punkt benötigt man drei Zahlen. Der Ursprung eines solchen Koordinatensystems liegt folglich im Punkt (0|0|0). Die Achsenreihenfolge ist dann: die x_1-Achse kommt einem "entgegen", die x_2-Achse geht nach rechts, die x_3-Achse nach oben.
Oft ist auch die Rede von einem "kartesischen Koordinatensystem". Das bedeutet, dass die Achsen senkrecht aufeinander stehen und die Einheiten gleichmäßig auf den Achsen abgetragen sind. Die Koordinatensysteme, mit denen wir arbeiten sind praktisch immer "kartesisch".

<u>Punktprobe</u>
Mit einer Punktprobe entscheidet man rechnerisch, ob ein Punkt auf dem Funktionsgraphen liegt, oder nicht.
Beispiel: Liegt B(3|5) auf demFunktionsgraphen von $f(x) = x^2$? Wenn es so wäre, so müsste der Funktionswert von f an der Stelle x=3 dann y=5 ergeben. Wir probieren aus, indem wir x=3 in die Funktion f einsetzen und den Funktionswert berechnen: $f(3) = 3^2 = 9$. Dies ist aber nicht gleich 5, daher ist die Punktprobe misslungen. Der Punkt B liegt also nicht auf dem Graphen von f.

<u>Koeffizient</u>
Beispiele: Lineare Gleichung: $3x + 4y = 14$ hier sind 3 und 4 jeweils Koeffizienten
Ganzrationale Funktion: $f(x) = 6x^3 + 8x^2$ hier sind 6 und 8 jeweils Koeffizienten
Das Wort Koeffizient lässt sich mit "Vorfaktor" übersetzen. In der Linearen Algebra setzt man zur Lösung von LGS oft nur erweiterte Koeffizientenmatrizen ein, in denen nur die entsprechenden Vorfaktoren auftauchen.

<u>Potenzregel, Summenregel, Faktorregel, Produktregel, Kettenregel:</u>
Bei der <u>Potenzregel</u> handelt es sich um eine Ableitungsregel, die immer dann anzuwenden ist, wenn nach der Ableitung einer Potenzfunktion $f(x)=x^n$ gefragt ist.
Die Potenzregel besagt: $f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=n \cdot x^{n-1}$
Die Potenzregel wird im Unterricht zunächst nur für ganzzahlige, positive Werte von n entwickelt. Sie ist aber auch für reelle Werte von n gültig.
Beispiele:
1) $f(x)=x^2 \rightarrow f'(x)=2 \cdot x^{(2-1)}=2x$
2) $g(x)=x^8 \rightarrow g'(x)=8 \cdot x^{(8-1)}=8x^7$
3) $h(x)=x^{-3} \rightarrow h'(x)=-3 \cdot x^{(-3-1)}=-3x^{-4}$
4) $k(x)=\sqrt{x} = x^{0.5} \rightarrow k'(x) = 0.5 \cdot x^{(0.5-1)} = 0.5 \cdot x^{-0.5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5) Achtung: Potenzregel nicht anwendbar, x steht im Exponent: $p(x)=e^x \rightarrow p'(x)=e^x$
6) Achtung: Potenzregel nicht anwendbar, keine Potenzfunktion: q(x) = sin(x) → q'(x) = cos(x)
Die <u>Summenregel</u> hilft, Funktionen abzuleiten, die aus zwei summierten Bausteinen aufgebaut ist. Sie besagt, dass man jeden Summanden einzeln ableiten darf (was bei Produkten nicht der Fall ist!)
1) $f(x)=x^5+x^3 \rightarrow f(x)=5x^4+3x^2$
2) $f(x)=x^5+\sin(x) \rightarrow f(x)=5x^4+\cos(x)$
3) $f(x)=x^5 \cdot x^3 \rightarrow f'(x)$ ist nicht gleich $5x^4 \cdot 3x^2$ Achtung: Hier entweder Produktregel nutzen oder besser: erst zu x hoch 8 zusammenfassen!
Die <u>Faktorregel</u> besagt einfach, dass konstante Vorfaktoren beim Ableiten erhalten bleiben:
1) $f(x)=8 \cdot x^2 \rightarrow f'(x)=8 \cdot 2x=16x$
2) $f(x)=8 \cdot \sin(x) \rightarrow f'(x)=8 \cdot \cos(x)$
3) $f(x)=x \cdot \sin(x) \rightarrow f'(x)$ ist nicht gleich $x \cdot \cos(x)$ Denn Vorfaktor x ist nicht konstant!

Die <u>Produktregel</u> ist kniffliger als die Summenregel:

1) $f(x)=x^5\cdot x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x)=5x^4\cdot x^3 \;+\; x^5\cdot 3x^2$

2) Allgemein: $f(x)=u\cdot v \quad \rightarrow \quad f'(x)=u'\cdot v \;+\; u\cdot v'$

Die <u>Kettenregel</u> beschreibt, wie man verschachtelte Funktionen ableitet:

1) $f(x)=\sin(x^5) \quad \rightarrow \quad f'(x)=5x^4\cdot\cos(x^5)$

2) $f(x)=e^{(x^5)} \quad \rightarrow \quad f'(x)=5x^4\cdot e^{(x^5)}$

<u>Kurvenschar</u>

Eine Funktionsschar (auch Funktionenschar oder Familie) ist eine Menge von Kurven, deren Gleichungen sich in mindestens einem Parameter unterscheiden.

Beispiel: $f_t(x)=3\cdot t\cdot e^{-0.45x}$

Im Beispiel bewirkt der Parameter t eine Streckung (oder Stauchung) der Funktion in y-Richtung. Für negative Werte von t wird der Graph dabei zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

<u>Integrationsvariable und Integrand</u>

Soll ein Integral über die Funktion f(x) bestimmt werden, so ist x die Integrationsvariable. Allgemein erkennt man die Integrationsvariable am "dx" oder "dt" o.ä.

Beispiel 1: $\int_c^d a x^2+4 \;\; dx \;=\; \left[\frac{1}{3}a x^3+4x\right]_c^d$ hier ist x die Integrationvariable, a Parameter

Beispiel 2: $\int_c^d a x^2+4 \;\; da \;=\; \left[\frac{1}{2}a^2 x^2+4a\right]_c^d$ hier ist a die Integrationvariable, x Parameter

Die Funktion, über die man integriert, heißt Integrand (in obigem Beispiel also $f(x) = ax^2+4$)

<u>Nullstellen:</u>

Die Nullstellen einer Funktion sind die Stellen ("x-Werte"), für die die Funktion den Wert 0 annimmt. Man bestimmt Sie, indem man f(x) = 0 setzt und dann weiterrechnet.
Nullstellen sind die Stellen, an denen die Funktion die x-Achse durchstößt oder berührt.
D.h.: Die x-Koordinate des Schnittpunktes eines Graphen mit der x-Achse ist eine Nullstelle.
Z.B. hat die Funktion $f(x) = x^2 - 1$ die Nullstellen $x= -1$ und $x = 1$, denn: $f(-1) = 0$ und $f(1) = 0$.
Achtung: Nullstellen haben erstmal nichts mit Ableitungen zu tun! Wir lösen zwar oft die Gleichung $f'(x) = 0$, weil das die notwendige Bedingung bei der Extremwertbestimmung ist. Aber das ist nur eine Anwendung des Konzeptes "Nullstelle".

<u>Satz vom Nullprodukt:</u>

"Ein Produkt ist Null, genau dann, wenn einer seiner Faktoren gleich Null ist."
Also $a \cdot b = 0$, genau dann wenn $a = 0$ oder $b = 0$.

Wann wird der Satz vom Nullprodukt eingesetzt?

- Gleichungen lösen
- Nullstellen berechnen

Wann darf man den Satz vom Nullprodukt einsetzen?

• auf der linken Seite der Gleichung stehen nur Faktoren <u>UND</u> auf der rechten Seite steht eine Null

Beispiele: Darf man den Satz vom Nullprodukt anwenden?

• $x + (4 + x^2) = 0$ → Nein, da auf der linken Seite eine Summe steht.
• $x \cdot (4 + x^2) = 0$ → Ja!
• $(x-1) \cdot (x+2) = 0$ → Ja!
• $x \cdot (x - 2) = 2$ → Nein, da auf der rechten Seite keine Null steht.

Beispiel, welches durch Ausklammern auf den Satz vom Nullprodukt führt:

$e^x + x \cdot e^x = 0 \quad <=> \quad e^x (1 + x)= 0 \quad <=> \quad e^x = 0$ oder $(1 + x)= 0$

Basiswechsel (bei Exponentialfunktionen)

Bei jeder Exponentialfunktion lässt sich die Basis in die Zahl e umschreiben, so dass man die bekannten Ableitungsregeln anwenden kann. Grundidee dieses "Tricks" sind zwei Beobachtungen: Die Erkenntnis, dass $e^{\ln(A)}$ identisch zu A ist (da sich "e hoch" und "ln" gegenseitig aufheben) und das Potenzgesetz $\left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c}$

Beispiel: $f(x) = 5^x$ soll abgeleitet werden.

Man nimmt zuerst einen Basiswechsel vor: $f(x) = 5^x = \left(e^{\ln(5)}\right)^x = e^{\ln(5)\cdot x}$

Diese Funktion kann man nun einfach mit der Kettenregel ableiten: $f'(x) = \ln(5)\cdot e^{\ln(5)\cdot x}$

Eingeschränkter Definitionsbereich (Analysis) und Randextrema

In vielen Aufgaben mit Sachkontext finden sich Angaben wie "Die Funktion f gibt den Wasserstand des Staubeckens im Zeitraum von 2 bis 5 Uhr an". Damit ist gemeint, dass nur die x-Werte im Intervall [2;5] zugelassen sind. Dies hat Auswirkungen z.B. bei der Suche nach Extrempunkten.

Beispiel: $f(x) = x^2$ mit x aus [2;5]

Bei der Suche nach einem Minimum würde man mit dem "Standardrezept" (Ableitung, Notwendige und hinreichende Bedingung) den Scheitelpunkt (0|0) als Extrempunkt finden. Die Extremstelle x = 0 liegt aber nicht im Definitionsbereich und ist damit kein Extrempunkt der Funktion!

Man benötigt den Satz: "Bei Funktionen mit eingeschränktem Definitionsbereich werden die Extrema entweder im Innern des Definitionsbereichs oder an dessen Rändern angenommen."

Auf unsere Situation angewendet bedeutet das: Im Innern gibt es kein Extrempunkt und da f(2) = 4 und f(5) = 25 ist, ist das Minimum dieser Funktion bei (2|4) zu finden.

Umkehrfunktion (Leistungskurs)

Eine Umkehrfunktion $\overline{f}$ bezüglich einer Ausgangsfunktion f ist die Funktion, die man erhält, wenn man x-Wert und y-Wert der Ausgangsfunktion austauscht. Beispiele:

$f(x) = x^3$	also $y = x^3$	Tausch: $x = y^3$	$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x}$	Also $\overline{f}(x) = \sqrt[3]{x}$
$f(x) = e^x$	also $y = e^x$	Tausch: $x = e^y$	$\Leftrightarrow y = \ln(x)$	Also $\overline{f}(x) = \ln(x)$

Hinweise: Im Koordinatensystem sind Ausgangsfunktion und Umkehrfunktion jeweils Spiegelbilder voneinander, wenn man eine Achsenspiegelung an der Geraden g(x) = x vornimmt!

Umkehrfunktionen benötigt man z.B. beim Lösen von Gleichungen. (Löse z.B. $e^x = 5$)

Achtung: Nicht immer gibt es eine eindeutige Umkehrfunktion. Bereits bei $f(x) = x^2$ muss man sich entscheiden, welchen Parabelzweig man nehmen will, denn stellt man sich die an g(x) = x gespiegelte Normalparabel vor, so erkennt man, dass das keine Funktion sein kann (da es zu einem x-Wert zwei y-Werte geben würde!)

Fernverhalten

Beim Fernverhalten einer Funktion fragt man danach, wie sich die y-Werte einer Funktion verhalten, wenn man immer größere x-Werte in die Funktion einsetzt (sowohl große positive als auch negative x-Werte)

Beispiele:

$f(x) = x^2$	für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$
$f(x) = x^3$	für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$
$f(x) = -x^3$	für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$
$f(x) = e^x$	für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 0$ (oder auch +0)
$f(x) = 1-e^x$	für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to -\infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 1$
$f(x) = \sin(x) \cdot e^x$	für $x \to \infty$ gilt: (nicht angebbar!)	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 0$
$f(x) = x \cdot e^x$	für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$	für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 0$ (*)

Bei ganzrationalen Funktionen richtet sich das Fernverhalten nach dem Koeffizient und der Art der höchsten Potenz (Koeffizient positiv oder negativ? Höchste Potenz gerade oder ungerade?). Bei anderen Funktionen hilft nur "schrittweises Probieren" und ein gutes Gefühl. Beim letzten Beispiel braucht man die Erkenntnis, dass bei Multiplikation von Exponentialfunktion und ganzrationalem

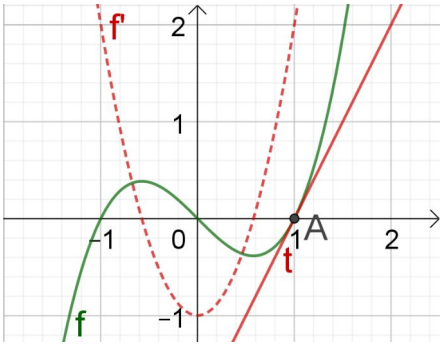
Term die Exponentialfunktion beim Fernverhalten dominiert. Für $x \to -\infty$ hätte man ja die "Spagatsituation", dass man sich statt "$x \cdot e^x$" nun "$-\infty \cdot 0$" vorstellen muss, was so ohne Weiteres ja keinen klaren Wert hat.

Geradenschar

Eine Funktionenschar, deren Vertreter nur Geraden sind, ist eine Geradenschar. Ebenso ist eine Funktionenschar, die nur aus Parabeln besteht, eine Parabelschar.

Ableitung

Die Ableitung einer Funktion f kann man als "Tangentensteigungsfunktion" verstehen: An jedem Punkt des Graphen der Funktion f kann man eine Tangente anlegen. In der Abbildung liegt an der Normalparabel $f(x) = x^3-x$ im Punkt A(1|0) eine Tangente. Die Steigung dieser Tangente ist gleich 2, denn die Ableitungsfunktion f ' (gestrichelt eingezeichnet) hat beim x-Wert 1 den Funktionswert 2. Dies ist die Steigung der Tangente an f im Punkt A.



Gleichungssystem (nicht linear)

Beispiel: Gleichung A: $x^2 = y$ Gleichung B: $x = \frac{1}{2} \cdot y$

Man sucht nun nach Werten für x und y, so dass beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt sind. Die Regeln für lineare Gleichungssysteme sind oft auch auf nichtlineare Systeme übertragbar (z.B. Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Additionsverfahren). Je nach System benötigt man einen guten Riecher. Einfaches Raten kann oft fehlschlagen! Beim Beispiel erkennt man schnell die Lösung x = 0 und y = 0. Dies ist aber nicht die einzige Lösung!

Mögliches Verfahren: Gleichung B mit 2 multiplizieren und dann Gleichsetzungsverfahren benutzen. Dann erhält man außerdem noch die Lösung x = 2 und y = 4.

Die Lösungsarten bei linearen Gleichungssystemen (keine / eine / unendlich viele Lösungen) müssen hier also nicht vorliegen! Das obige Beispiel hatte ja genau zwei Lösungskombinationen!

Differentialrechnung und Differenzierbarkeit

Mit Differentialrechnung wird allgemein das Rechnen mit Hilfe von Ableitungen bezeichnet. Der Name kommt daher, dass man zur Herleitung des Ableitungsbegriffs den Grenzwert des Differenzenquotienten bildet.

Eine Funktion heißt "differenzierbar", wenn man überall die Ableitung angeben kann. In der Schule kommen fast nur Funktionen vor, die überall differenzierbar sind. Eine sehr bekannte Funktion, die an einer Stelle nicht differenzierbar ist, ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ die im Koordinatensystem wie ein "V" aussieht, wobei die Spitze im Koordinatenursprung liegt. In diesem Punkt ist f nicht differenzierbar, weil man dort (vereinfacht gesagt) nicht eindeutig eine Tangente anlegen kann! Die Ableitung der Betragsfunktion würde also lauten:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Monotonietabelle und Krümmungstabelle

Aus einer Monotonietabelle kann man Ablesen, in welchen Intervallen eine Funktion monoton wachsend oder fallend ist. Man erstellt eine solche Tabelle, indem man zunächst nach den Nullstellen der ersten Ableitung sucht, da dies die verdächtigen Stellen für den Monotoniewechsel sind (und hier möglicherweise auch Extremstellen vorliegen!).

Aus einer Krümmungstabelle kann man Ablesen, in welchen Intervallen eine Funktion

linksgekrümmt oder rechtsgekrümmt ist. Man erstellt eine solche Tabelle, indem man zunächst nach den Nullstellen der zweiten Ableitung sucht, da dies die verdächtigen Stellen für den Krümmungswechsel sind (und hier möglicherweise auch Wendestellen vorliegen!).

Bilanzsumme

In Sachzusammenhängen kann die Eigenschaft, dass Flächen unterhalb der x-Achse negativ in den Wert des Integrals eingehen, sehr nützlich sein.
Beispiel: $f(x) = (x-1)^3 - (x-1)$ ist die Geschwindigkeit eines Spielzeugautos im Intervall [0;2], wobei x in Sekunden und f(x) in Meter pro Sekunde zu verstehen ist.
Hinweis: Wenn man die Funktion zeichnen lässt (das sollte man tun!), so erkennt man im angegebenen Intervall sowohl Funktionswerte oberhalb als auch unterhalb der x-Achse. Diese negativen Geschwindigkeiten sollen so verstanden werden, dass sich das Auto dann rückwärts bewegt.
Mit Hilfe eines Integrals kann man auf die gefahrene Strecke schließen. Es gilt:

$\int_0^1 f(x)\,dx = 0{,}25$ d.h. im Zeitintervall [0;1] fuhr das Auto 0,25 Meter weit.

$\int_1^2 f(x)\,dx = -0{,}25$ d.h. im Zeitintervall [1;2] fuhr das Auto 0,25 Meter weit rückwärts.

$\int_0^2 f(x)\,dx = 0$ d.h. im Zeitintervall [0;2] fuhr das Auto zwar vor und zurück, ist am Ende aber um Null Meter vom Ausgangspunkt entfernt. Die Bilanzsumme ist hier Null.

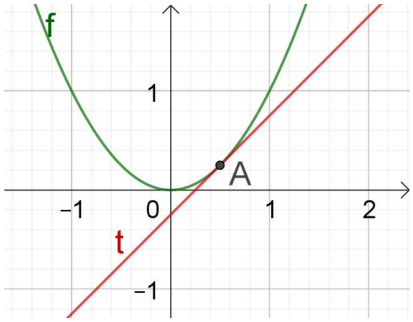
$\int_0^{1,5} f(x)\,dx = 0{,}140625$ d.h. im Zeitintervall [0;1,5] fuhr das Auto zwar vor und zurück, ist am Ende aber um 0,140625 Meter vom Ausgangspunkt entfernt. Die Bilanzsumme ist hier 0,140625

Ursprungsgröße

Dieser Begriff kommt oft bei Integralen in Sachzusammenhängen vor, da man dort oft von einer Änderungsrate (Geschwindigkeit) auf die Ursprungsgröße (Strecke) schließt.

Tangente

Eine Tangente ist eine Gerade, die eine Kurve (also meist der Graph einer Funktion, aber Kreise o.ä. sind natürlich auch möglich) in einem Punkt berührt. In der Abbildung ist die Gerade t im Punkt A eine Tangente an den Graphen der Funktion f.
Mit "berühren" ist gemeint, dass die Tangente in dem betreffenden Punkt die "gleiche Richtung" hat, wie die Funktion.
Im Berührpunkt A(0,5|0,25) gilt: Die Steigung m der Tangente ist gleich der Ableitung von f an der Stelle, also: f '(0,5) = m



Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt bezeichnet die Multiplikation zweier Vektoren, wobei das Ergebnis eine reelle Zahl ist. Falls das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich 0 ist, so sind diese orthogonal zueinander (d.h sie sind senkrecht zueinander bzw. sie stehen rechtwinklig zueinander).

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3 \quad \text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32$$

Linearkombination und lineare Abhängigkeit

Eine Linearkombination zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist ein Term der Gestalt $a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w}$ wobei a und b beliebige reelle Zahlen sind.
Man sagt, dass zwei Vektoren linear unabhängig sind, wenn die Gleichung $a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} = 0$ nur die Lösung a = 0 und b = 0 besitzt. Letztendlich ist das nur eine sehr komplizierte Formulierung für die Eigenschaft, dass $\vec{v}$ und $\vec{w}$ keine Vielfachen voneinander sind.

Andersherum: Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn die Gleichung $a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} = 0$ unendlich viele Lösungen für a und b besitzt – d.h. die beiden Vektoren sind Vielfache voneinander ("haben die gleiche Richtung (Gegenrichtung gilt auch)"). Bei zwei Vektoren, die Vielfache voneinander sind, sagt man auch: die Vektoren sind kollinear.

Beispiel: Die Vektoren $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ und $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix}$ sind kollinear bzw. linear abhängig.

Die Gleichung $a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} = 0$ hat unendlich viele Lösungen (z.B. a = –2 und b = 1 oder a = 6 und b = –3)

Aber bei drei Vektoren wirds etwas kniffliger:
Eine Linearkombination dreier Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{u}$ ist ein Term der Gestalt
$a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} + c\cdot\vec{u}$ wobei a, b und c beliebige reelle Zahlen sind.
Man sagt, dass drei Vektoren linear unabhängig sind, wenn die Gleichung
$a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} + c\cdot\vec{u} = 0$ nur die Lösung a = 0 und b = 0 und c = 0 besitzt (andernfalls sind sie linear abhängig)
Hier hilft es nur, tatsächlich ein Gleichungssystem zu betrachten. Drei Vektoren können linear abhängig sein, obwohl die Vektoren nicht Vielfache voneinander sind. Geometrisch bedeutet lineare Abhängigkeit, dass die drei Vektoren in einer Ebene liegen. Sind drei Vektoren linear unabhängig, liegen sie nicht in einer Ebene.
Beispiel:

Die Vektoren $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ sind linear abhängig. Offensichtlich liegen sie alle drei in der "Bodenebene", oder genauer: in der x_1/x_2-Ebene des Koordinatensystems. Und auch die Gleichung $a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} + c\cdot\vec{u} = 0$ hat nicht nur die Lösung a = 0 und b = 0 und c = 0, denn auch a = 2 und b = 3 und c = –1 löst die Vektorgleichung.

Die Vektoren $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. Offensichtlich liegen sie nicht alle drei in einer Ebene. Und auch die Gleichung $a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} + c\cdot\vec{u} = 0$ kann nur die Lösung a = 0 und b = 0 und c = 0 besitzen.

<u>Punkt, Vektor, Ortsvektor, Verbindungsvektor, Richtungsvektor, Spannvektor, Nullvektor</u>
Im Koordinatensystem unterscheidet man zunächst <u>Punkte</u> und <u>Vektor</u>en: ein Punkt ist ein Ort im Koordinatensystem, ein Vektor ist eine Art "Verschiebungsvorschrift" (z.B.: "zwei nach rechts, drei nach hinten, vier nach oben") wobei der Start dieser Verschiebung zunächst nicht wichtig ist.
Wenn man aber sagt, dass $\vec{p}$ ein <u>Ortsvektor</u> des Punktes P ist, so meint man, dass man ausgehend vom Koordinatenursprung mit Hilfe der Verschiebung $\vec{p}$ beim Punkt P landet (in diesem Fall sind die Einträge des Vektors $\vec{p}$ mit dem des Punktes P identisch).
Verbindet man zwei Punkte (z.B. P(1|2) und Q(4|7)) durch einen Vektor, so lautet dieser Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. Rechnerisch kann man ihn bestimmen, indem man die Koordinaten der Punkte jeweils subtrahiert (also $x_{Ziel} - x_{Start}$, hier 4–1 = 3, das gleiche mit y-Werten).
Der <u>Richtungsvektor</u> einer Geraden in Parameterform (z.B. ist bei $\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ der Vektor hinter dem Parameter r der Richtungsvektor) ist ein Vektor, der "auf der Geraden liegt", also z.B. der zwei unterschiedliche Punkte auf der Geraden verbindet. Deswegen kann man einen Richtungsvektor auch direkt berechnen, wenn man nur zwei Punkte der Geraden kennt: Dieser Richtungsvektor ist dann der Verbindungsvektor dieser zwei Punkte (Achtung: Ein und dieselbe Gerade kann unterschiedliche Richtungsvektoren haben!)

Bei Ebenen gibt es entsprechend nicht einen Richtungsvektor sondern zwei Spannvektoren, die von der Idee her ähnlich wie Richtungsvektoren funktionieren.
Ein Nullvektor ist ein Vektor, bei dem alle Einträge gleich Null sind. Dieser Vektor hat als einziger Vektor keine festgelegte Richtung und kommt daher auch nicht als Spann- oder Richtungsvektor in Betracht.

Matrix:
- Eine Matrix hat m-Zeilen. Dabei steht "m" für die Anzahl der Zahlenwerte, die untereinander stehen. Die Zeilen einer Matrix werden oft auch als Zeilenvektoren bezeichnet.
- Eine Matrix hat n-Spalten. Dabei steht "n" für die Anzahl der Zahlenwerte, die nebeneinander stehen. Die Spalten einer Matrix werden oft auch als Spaltenvektoren bezeichnet.
- Folglich hat eine Matrix m · n Zahlen. Man spricht daher oft von einer "m kreuz n" Matrix
- Besitzt eine Matrix ebensoviele Spalten wie Zeilen, so wird sie als „n kreuz n"-Matrix oder auch quadratische Matrix bezeichnet
- Eine quadratische Matrix, die nur Elemente aus dem Intervall [0;1] enthält und deren Spaltensumme gleich Eins ist, heißt "stochastische Matrix".
- Besitzt eine Matrix nur eine Spalte, wird sie als Spaltenmatrix bezeichnet.
- Besitzt eine Matrix nur eine Zeile, wird sie als Zeilenmatrix bezeichnet.
- a_{ik} wird als Matrixelement bezeichnet

$$\begin{array}{cc} & \text{n=4 Spalten} \rightarrow \\ \text{m=3 Zeilen} \downarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \end{array}$$

Koeffizientenmatrix
Eine Koeffizientenmatrix sind die Koeffizienten eines LGS in Matrixform. Eine solche Matrix kann auch direkt in den GTR eingegeben werden.

$$\begin{array}{lllll} I & 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & =0 \\ II & x_1 & +x_2 & & =3 \\ III & 3x_1 & +5x_2 & +x_3 & =2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Übergangsmatrizen, Wechselquoten, Ausgangsverteilung und Folgeverteilung
Bei Übergangsmatrizen hat man es oft mit "Wechselquoten" zu tun, also Anteile einer Menge von z.B. Personen, die von einem zum anderen Zustand wechseln. (Die Zahlen in der Übergangsmatrix sind diese Wechselquoten). Im Allgemeinen weiß man, mit welcher Verteilung man beginnt (dies ist die Ausgangsverteilung oder auch Startverteilung). Dann gilt:
Übergangsmatrix × Ausgangsverteilung = Folgeverteilung
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 2000+0{,}4\cdot 4000+0{,}2\cdot 15000 \\ 0{,}6\cdot 2000+0\cdot 4000+0\cdot 15000 \\ 0{,}4\cdot 2000+0{,}6\cdot 4000+0{,}8\cdot 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4600 \\ 1200 \\ 15200 \end{pmatrix}$$

Die Verteilung nach einer Periode beträgt 4600 in Gruppe A, 1200 in Gruppe B und 15200 in Gruppe C.

Achsensymmetrie zur y – Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung:

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich von f gilt $f(-x) = f(x)$.

Für ganzrationale Funktionen f gilt zusätzlich: Der Graph von f ist genau dann achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn der Funktionsterm f(x) nur Potenzen von x mit geraden Exponenten enthält (und ggf. zusätzlich einen konstanten Summanden).

Bsp. A) $f(x) = x^6 - 5x^2 + 2$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da f ganzrational ist und nur gerade Exponenten (plus Summand 2) enthält.

Bsp. B) $f(x) = x^6 - 2x^3 + 2$ ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse, da f zwar ganzrational ist aber nicht nur gerade Exponenten enthält. (Die Funktion ist übrigens auch nicht punktsymmetrisch – sie hat also keine Standardsymmetrie)

Bsp. C) $f(x) = x^4 \cdot e^{(x^2)}$

Vermutung: f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Nachweis:

$$f(x) = f(-x)$$

$\Leftrightarrow x^4 \cdot e^{(x^2)} = (-x)^4 \cdot e^{((-x)^2)}$ Die Gleichung ist offenbar korrekt, da die Minuszeichen durch die geraden Exponenten direkt wieder eliminiert werden. Also ist f achsensymmetrisch zur y-Achse

Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich von f gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Für ganzrationale Funktionen f gilt zusätzlich: Der Graph von f ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn der Funktionsterm f(x) nur Potenzen von x mit ungeraden Exponenten enthält.

Bsp. D) $f(x) = x^7 - 2x^3$ ist punktsymmetrisch zur y-Achse, da f ganzrational ist und nur ungerade Exponenten enthält.

Bsp. E) $f(x) = x^7 - 2x^3 + 9$ ist nicht punktsymmetrisch zur y-Achse, da f zwar ganzrational ist, aber noch den konstanten Summanden 9 enthält.

Bsp. F) $f(x) = x^5 \cdot e^{(x^2)}$

Vermutung: f ist punktsymmetrisch zur y-Achse. Nachweis:

$$-f(x) = f(-x)$$

$$\Leftrightarrow -\left(x^5 \cdot e^{(x^2)}\right) = (-x)^5 \cdot e^{((-x)^2)}$$

$\Leftrightarrow -\left(x^5 \cdot e^{(x^2)}\right) = -\left(x^5 \cdot e^{(x^2)}\right)$ Also ist f achsensymmetrisch zur y-Achse

Achtung 1: Bei Beispiel F könnte man auf den Gedanken kommen "die Exponenten von x sind sowohl gerade als auch ungerade, daher besitzt f gar keine Symmetrie!". Dies ist falsch, denn die Schlussfolgerung darf man nur bei ganzrationalen Funktionen anwenden!

Achtung 2: Wenn man vermutet, dass z.B. bei $f(x) = x^5 \cdot e^{(x^3)}$ gar keine Symmetrie vorliegt, so braucht man nur ein Gegenbeispiel finden: Es ist $f(1) = e$ und $f(-1) = \frac{-1}{e}$ d.h. weder $f(-x) = -f(x)$ noch $f(-x) = f(x)$ kann zutreffen!

Achtung 3: Die obigen Regeln gelten nur für die "Standardsymmetrie", also Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung.

Beispiel: die Funktion $f(x) = (x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

ist eine um 5 nach rechts verschobene Normalparabel. Die zur y-Achse parallele Gerade x = 5 ist hier selbstverständlich Symmetrieachse! Aber es liegt eben keine Standardsymmetrie zur y-Achse vor. Muss man bei einer Funktion eine Symmetrie zu einer anderen Achse (oder zu einem anderen Punkt) nachweisen, so muss man die Funktion zunächst verschieben, so dass die Symmetrieachse (oder das Symmetriezentrum) auf der y-Achse (im Ursprung) zu liegen kommt!

Ana	Eulersche Zahl e
Ana	Funktion, Funktionsgraph
Ana	Funktionsvariable
Ana	Funktionswert
Ana	Gleichungssystem (nicht-linear)
Ana	Intervall
Ana	Logarithmus
Ana	Logarithmus naturalis = natürlicher Logarithmus
Ana	Monotonie: fallend, wachsend, strenge Monotonie
Ana	Parameter (Funktionenschar)
Ana	Potenzen
Ana	Punkt, x-Wert, Stellen, Funktionswert
Ana	Steckbriefaufgabe (Exponentialfunktion)
Ana	Steckbriefaufgabe (ganzrationale Funktion)
Ana	Steckbriefaufgabe (sonstige Funktion)
Ana	Umformung einer Gleichung
Ana	Umformung eines Terms
Ana	Vertreter einer Funktionenschar
Ana	Vertreter einer Schar
Ana	Wertetabelle
Ana	eingeschränkter Definitionsbereich (Analysis)
Ana	ganzrationale Funktion
Ana	quadratische Gleichung
Diff	Extrema
Diff	Extrempunkte, Hochpunkte, Tiefpunkte, Wendepunkte, Sattelpunkte
Diff	Extremwertaufgabe
Diff	Faktorregel
Diff	Kettenregel
Diff	Kurvendiskussion
Diff	Produktregel
Diff	Sattelpunkt
Diff	Summenregel
Diff	Wendetangente
Diff	Zielfunktion und Nebenbedingung
Diff	differenzierbar = ableitbar
Diff	notwendige und hinreichende Bedingung
Diff	waagerechte Tangente
Diff	Änderungsrate (momentane ÄR, durchschnittliche ÄR)
Int	Flächenannäherung
Int	Integral
Int	Mittelwert (einer Funktion)
Int	Stammfunktion
Int	Wachstumsgeschwindigkeit
Int	eingeschlossene Fläche
Int	negative Fläche
Int	uneigentliche Integrale
LGS	Gauß-Verfahren
LGS	Gleichungssystem (linear)
LGS	Koeffizient (LGS)
LGS	Koeffizientenmatrix
LGS	Lösung: keine, genau eine, unendlich viele Lösungen

LGS Lösungskombination
LGS Parameterwahl
OK Ana Basiswechsel (Exp-Fkt)
OK Ana Betragsstriche (Analysis)
OK Ana Definitionsbereich
OK Ana Exponent, gebrochen z.B. 2^0,5
OK Ana Fernverhalten
OK Ana Funktionenschar
OK Ana Geradenschar (Analysis)
OK Ana Koeffizient (Analysis)
OK Ana Koordinatenachsen, x-Achse, y-Achse
OK Ana Nullstelle
OK Ana Potenzregeln
OK Ana Punkt-/Achsensymmetrie
OK Ana Punktprobe (Analysis)
OK Ana Randextrema
OK Ana Satz vom Nullprodukt
OK Ana Umkehrfunktion
OK Diff Differentialrechnung
OK Diff Krümmungstabelle
OK Diff Monotonietabelle
OK Diff Tangente
OK Int Bilanzsumme
OK Int Integrationsvariable
OK Int Ursprungsgröße
OK LGS Matrix (Koeffizientenmatrix)
OK Vektor Nullvektor
OK Vektor Ortsvektor
OK Vektor Richtungsvektor
OK Vektor Skalarprodukt (senkrecht / rechtwinklig / orthogonal)
OK Vektor Spannvektor
OK Vektor Stützvektor
OK Ümat Ausgangsverteilung
OK Ümat Folgeverteilung
OK Ümat Wechselquote
OK Ümat Übergangs- und Prozessmatrix
Unsinn Aufleitung (schlechte Sprache. Gemeint ist i.d.R. "Stammfunktion")
Unsinn unendliche Integrale (vielleicht sind uneigentliche Integrale gemeint)
Vektor Betrag eines Vektors, |v|
Vektor Betragsstriche (Vektor)
Vektor Ebenengleichung
Vektor Einheitsvektor
Vektor Gegenvektor
Vektor Geradengleichung (Vektor)
Vektor Geradenschar (Vektorgeometrie)
Vektor Hypotenuse, Kathete
Vektor Kegel
Vektor Koordinatenform
Vektor Kreuzprodukt
Vektor Lagebeziehung
Vektor Länge eines Vektors
Vektor Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Vektor Normalenform
Vektor Normalenvektor
Vektor Parameter (Parameterform)
Vektor Parameterform
Vektor Punktprobe (Vektorgeometrie)
Vektor Pyramide
Vektor Quader
Vektor Schnittgerade
Vektor Vektoraddition
Vektor Vektormultiplikation (Vorsicht!!!)
Vektor Winkel: spitzer Winkel / stumpfer Winkel / rechter Winkel
Vektor Würfel
Vektor Zylinder
Vektor dreidimensionale Vektoren
Vektor eingeschränkter Definitionsbereich (Vektorgeometrie)
Vektor orthogonal
Vektor parallel identisch Schnittpunkt windschief
Ümat Anteile, Prozente, Absolute Zahlen
Ümat Grenzmatrix
Ümat Matrix (Übergangsmatrix)
Ümat Spaltensumme
Ümat Vorjahresverteilung
Ümat geschlossenes System (Übergangsmatrizen)
Ümat stabile Verteilung