Aufgaben zu Hypothesentests

• Bearbeite Aufgabe 2.4.1 aus meinem Lösungsarchiv (Handschrift rechts:)

• Teste die Hypothese "Diese rote Münze ist gezinkt!" für $n = 100$ auf 5%igem Signifikanzniveau.
• Fritzchen sagt: "Ich habe die Münze manipuliert, so dass $P(\text{Wappen}) = 0{,}7$ ist!" Berechne den Fehler erster und zweiter Art!

• Formuliere eine neue Aufgabe / Sachzusammenhang für einen linksseitigen, einen rechtsseitigen und einen beidseitigen Test. (Bitte per Moodle an mich!)

Auszug aus dem Abitur 2012 Aufgabe 7 (LK)

e) Die Herstellerfirma rechtfertigte die letzte Preiserhöhung mit der Behauptung, dass nach einer Verbesserung der Produktion nun maximal 1% aller Smartphones defekt sind. Ein Großhändler, der von der Preiserhöhung betroffen ist, bezweifelt diese Behauptung und möchte sie daher mit Hilfe eines Hypothesentests überprüfen. Er entnimmt dazu der Lieferung zufällig eine Stichprobe von 1000 Stück und testet die Hypothese $H0 : p \leq 0{,}01$.

(1) Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel für die angegebene Hypothese auf Grundlage der Stichprobe mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$.

(2) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang, welchen Fehler der Großhändler durch die Wahl der Hypothese möglichst vermeiden wollte.

(3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers 2. Art für den Fall, dass der Ausschussanteil unverändert bei 2% liegt.

(4) Die Wahrscheinlichkeit aus (3) erscheint dem Großhändler unakzeptabel hoch. Beschreiben Sie zwei unterschiedliche Möglichkeiten, diesen Test so zu verändern, dass die Wahrscheinlichkeit aus (3) bei gleichbleibender H0-Hypothese verringert werden kann. [Hinweis: Hier ist keine Rechnung verlangt.]

Auszug aus dem Abitur 2013 Aufgabe 7 (LK)

e) Die Einsatzleitung der Polizei vermutet, dass wegen der häufigen Kontrollen mittlerweile höchstens 10 % der Fahrräder Mängel aufweisen. Sie möchte diese Vermutung überprüfen und, falls sie richtig ist, die Kontrollen nur noch jährlich statt monatlich durchführen. An einem Morgen werden 200 Fahrräder kontrolliert.

Die Polizei hat folgende Entscheidungsregel auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ festgelegt: Finden sich in der Stichprobe weniger als 13 Fahrräder mit Mängeln, so wird die Zahl der Kontrollen reduziert, andernfalls nicht.

(1) Bestimmen Sie die Hypothesen, die zu dieser Entscheidungsregel führten. Beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang und begründen Sie damit die Wahl der Hypothesen aus der Sicht der Polizei.

Durch einen Irrtum wurde die Kontrolle unabhängig voneinander zweimal durchgeführt. Die beteiligten Polizisten beschließen daraufhin, die Entscheidungsregel ebenfalls zu „verdoppeln“: Finden sich in der Stichprobe von nun 400 Fahrrädern weniger als 26 Fahrräder mit Mängeln, so wird die Zahl der Kontrollen reduziert, andernfalls nicht.

(2) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art betrug im Test aus (1) gerundet 0,032. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art bei dem neuen Test deutlich kleiner ist.

(3) Zeigen Sie, dass gilt: $\sigma_{400}=\sqrt{2}\cdot\sigma_{200}$,wobei σ_{200} und σ_{400} die Standardabweichungen binomialverteilter Zufallsgrößenmit n = 200 bzw. n = 400 und unbekanntem p bezeichnen. Erläutern Sie, welche Auswirkung dies auf die Berechnung des Annahmebereichs der Hypothese bei Verdoppelung des Stichprobenumfangs von 200 auf 400 hat, wenn weiterhin das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ gelten soll.

Lösung zur Aufgabe von 2012

Modelllösung e)

(1) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der defekten Smartphones in der Stichprobe an. Dann kann X als binomialverteilt angenommen werden mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 1\,\%$ und Stichprobenanzahl $n = 1000$.

Der Erwartungswert von X beträgt $\mu = 1000 \cdot 0,01 = 10$, die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99} \approx 3,146 > 3$.

Also ist die Laplace-Bedingung erfüllt und es gilt näherungsweise:

$P_{H_0}\left(X \leq \mu + 1,64 \cdot \sigma\right) \geq 0,95$ und es ist $\mu + 1,64 \cdot \sigma \approx 15,16$.

Als Entscheidungsregel erhält man:

Die Hypothese H_0 wird genau dann abgelehnt, wenn $X \geq 16$, ansonsten wird die Hypothese beibehalten.

(2) Der Großhändler möchte den Fehler 1. Art vermeiden, nämlich dass gilt: Die Hypothese des Herstellers $p \leq 0,01$ ist wahr, wird aber aufgrund einer zufällig hohen Anzahl defekter Smartphones fälschlicherweise verworfen.

(3) Der Fehler 2. Art beträgt:

$$P_{p=0,02}(X \leq 15) = \sum_{k=0}^{15} \binom{1000}{k} \cdot 0,02^{k} \cdot 0,98^{1000-k} \overset{Tabelle}{\approx} 0,1539 .$$

(4) Es gibt zwei Prinzipien, wie der Fehler verringert werden kann:

Entweder durch eine Vergrößerung des Stichprobenumfangs n oder durch Erhöhung des Signifikanzniveaus α (oder durch eine Kombination beider Maßnahmen).

Weitere sinnvolle Möglichkeiten (z. B. Randomisierung) werden ebenfalls akzeptiert.

Lösung zur Aufgabe von 2013

Modelllösung e)

(1) Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrrad Mängel hat.

Getestet wird $H_0 : p \geq 0{,}1$ gegen $H_1 : p < 0{,}1$ (linksseitiger Hypothesentest).

Fehler 1. Art: In Wahrheit sind mindestens 10 % der Fahrräder defekt. Es werden aber in der Stichprobe höchstens 12 Fahrräder mit Mängeln gefunden, was zu einer irrtümlichen Reduktion der Zahl der Kontrollen führt.

Zu dieser Wahl passt die Intention, den Fehler zu vermeiden, dass die Anzahl der Kontrollen verringert wird, obwohl der Anteil der Fahrräder mit Mängeln in Wirklichkeit nicht gesunken ist (Fehler 1. Art). Daraus ergibt sich die Wahl der H_0-Hypothese $H_0 : p \geq 0{,}1$.

(2) Die Zufallsgröße X_{400} : „Anzahl der mängelbehafteten Fahrräder in der Stichprobe" kann (bei Gültigkeit der Hypothese H_0) als binomialverteilt angenommen werden mit n = 400 und p = 0,1. Dann bestimmt man als Fehler 1. Art mit Hilfe des TR oder der Tabelle: $P_{p=0,1}(X_{400} \leq 25) \approx 0{,}0054$. Dieser Wert ist lediglich ca. ein Sechstel der ursprünglichen Fehlerwahrscheinlichkeit und damit erheblich kleiner.

(3) Es gilt: $\sigma_{200} = \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)}$, also:

$$\sigma_{400} = \sqrt{400 \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}.$$

Die Grenze k_{200} des Ablehnungsbereichs für n = 200 bestimmt man näherungsweise mit der Formel $k_{200} \approx \mu_{200} - 1{,}64 \cdot \sigma_{200}$. Die Grenze k_{400} des Ablehnungsbereichs für n = 400 wird analog bestimmt durch $k_{400} \approx \mu_{400} - 1{,}64 \cdot \sigma_{400} = 2 \cdot \mu_{200} - 1{,}64 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}$.

Dies ist aber nicht gleich $2 \cdot k_{200} \approx 2 \cdot \mu_{200} - 1{,}64 \cdot 2 \cdot \sigma_{200}$. D. h., die von den Polizisten durch Verdoppelung ermittelte Grenze ist zu niedrig.

Formal weniger detaillierte Erklärungen, die aber den wesentlichen Punkt beinhalten, dass statt der Verdoppelung des Radius um den Erwartungswert eine Multiplikation des Radius mit dem Faktor $\sqrt{2}$ durchgeführt werden muss, können ebenfalls mit voller Punktzahl bewertet werden.