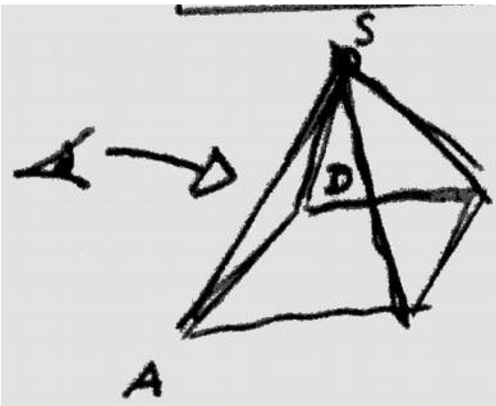
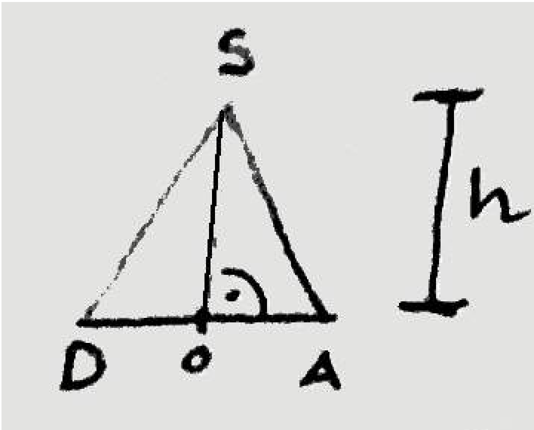
S146 Nr 11c

Man stellt sich vor, dass man die Pyramide von der Seite betrachtet:



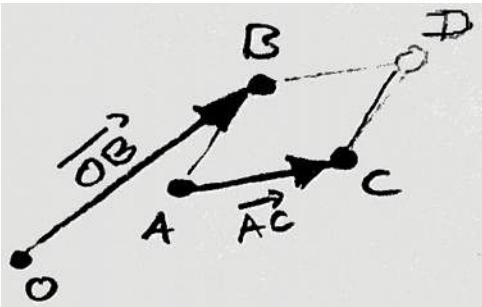
Dann sieht man nur noch das „Seitendreieck“:



Exakt zwischen den Punkten D und A liegt der Koordinatenursprung O. Aufgrund der speziellen Lage der Pyramide (die Spitze S liegt direkt „vor“ uns – genauer: in der x2/x3 Ebene) ist die Höhe des Dreiecks genau die Strecke zwischen Koordinatenursprung und Punkt S. (Bekanntermaßen bildet die Höhe eines Dreiecks mit der Grundseite einen rechten Winkel – siehe Bild oben)

S146 12c

Am besten zeichnet man sich die Situation auf:



Dann sieht man, dass der Verbindungsvektor von A zu C in dem Parallelogramm nochmal auftaucht: nämlich als Verbindungsvektor von B zu D (weils ja ein Parallelogramm sein soll!)

Mathematisch gesprochen: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Um eine Vektorkette nach D zu bilden, denkt man sich:

Vom Ursprung zu Punkt B und von dort zu Punkt D. Rechnerisch:

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$

nun kann man $\overrightarrow{BD}$ ersetzen durch $\overrightarrow{AC}$ (siehe oben) und erhält

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}$

Und genau das ist jeweils die Lösung.

S150 Nr 8a
Um eine Geradengleichung aufzustellen, benötigt man einen Stützvektor (also den Ortsvektor eines Punktes, der auf der Geraden liegt) und einen Richtungsvektor (also einen Vektor, der „in Richtung der Geraden zeigt")
Man kann also einfach die Koordinaten von Punkt A für den Stützvektor verwenden und den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor. Damit erhält man die angegebenen Lösungen.

S155 Nr 7a)
Man sieht: der zweite Richtungsvektor ist das -1,5fache des ersten Richtungsvektors. Aber wenn man eine Punktprobe macht (gucken, ob der Stützvektor von h auf g liegt):

$$\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} \iff \begin{cases}5 = 1+2r\\ 0 = -2r\\ 1 = 5+2r\end{cases}$$

Dann erkennt man direkt aus Gleichung 2, dass r=0 sein muss… aber das passt dann nicht mehr mit Gleichung 1 oder 3. Die Punktprobe scheitert also, und daher sind die Geraden parallel.
7b)
Auch hier erkennt man, dass die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind. Aber man erkennt auch schnell, dass man für t=1 in der Geradengleichung g direkt den Stützvektor von Gerade h erhält. Also sind die Geraden identisch.

8a Man erkennt, dass die Richtungsvektoren nicht Vielfache voneinander sind. Also setzt man g=h:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}1+2t = 1-2r\\ 1 = 2+r\\ 1+4t = 6+r\end{cases} \quad \Big| \text{ Variablen nach links, Zahlen nach rechts}$$

$$\iff \begin{cases}2t+2r = 0\\ -r = 1\\ 4t-r = 5\end{cases}$$

Man erkennt hier direkt aus Gleichung 2, dass r=-1 sein muss. Setzt man das in Gleichung 1 ein, so ergibt sich, dass t=1 sein muss. Nun muss man noch schauen, ob die letzte Gleichung auch noch erfüllt ist. Einsetzen der Variablen liefert: Gleichung erfüllt. Also haben die beiden Geraden einen gemeinsamen Punkt. Nun ists egal, ob man r=-1 in Gleichung h oder t=1 in Gleichung g einsetzt: Man erhält stets den Punkt aus der Musterlösung

8b ebenso wie 8a:

$$\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t = s \\ 1 + t = 4 + 3s \\ 2t = 3 + 2s \end{cases} \quad \Big| \text{ Variablen nach links}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - s = -3 \\ t - 3s = 3 \\ 2t - 2s = 3 \end{cases} \quad \mathrm{I} - \mathrm{II}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - s = -3 \\ 2s = -6 \\ 2t - 2s = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow s = -3$$

In I einsetzen: $t - (-3) = -3$

$$\Rightarrow \quad t = -6$$

Aber diese beiden Variablenwerte in Gleichung 3 eingesetzt liefern eine falsche Aussage. Daher gibt es keine Lösung! Daher auch keine gemeinsamen Punkte. Und weil die Richtungsvektoren ja keine Vielfachen voneinander waren sind sie auch nicht parallel. Also sind sie windschief!