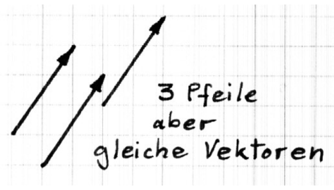
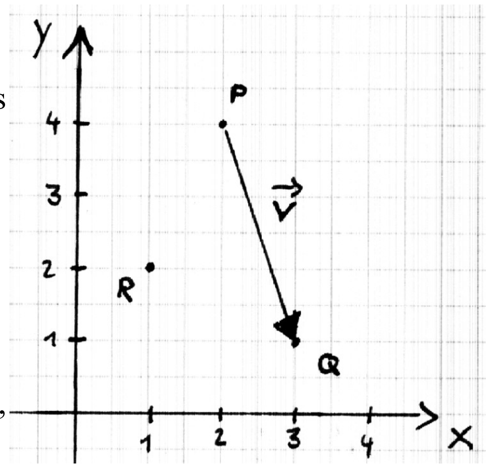
Vektoren – Grundlagen



In der Geometrie lassen sich Vektoren als eine Art Verschiebung darstellen. Im Koordinatensystem zeichnet man Vektoren als Pfeile mit bestimmter Länge und Richtung. Zwei verschiedene Pfeile mit *gleicher Länge* und *gleicher Richtung* sind verschiedene Darstellungen eines *einzigen Vektors*.



Will man nun ein Objekt von P(2 | 4) nach Q(3 | 1) verschieben (wie durch den Verschiebungspfeil angedeutet), so kann man das sprachlich folgendermaßen ausdrücken: „Das Objekt wird um 1 Einheit nach rechts und um 3 Einheiten nach unten verschoben“. In Vektorschreibweise drückt man die Verschiebung folgendermaßen aus: $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Das kleine Pfeilchen über dem v zeigt an, dass von einem Vektor die Rede ist. Und man verschiebt um 1 Einheit in Richtung der positiven x-Achse (also nach rechts) und um 3 Einheiten in Richtung der negativen y-Achse (also nach unten, wegen des Minuszeichens).

Aufgaben: Ausgehend von Punkt Q soll eine weitere Verschiebung (benannt mit $\vec{w}$) hin zu Punkt R(1 | 2) ausgeführt werden. Die Koordinaten des Vektors sind also: $\vec{w}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

Ausgehend von Punkt R soll nun die Verschiebung $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ durchgeführt werden. Das Ziel dieser Verschiebung ist der Punkt mit den Koordinaten (___|___)

Hilfreiche Schreibweisen

1. Im Ausgangsbeispiel ging es um eine Verschiebung von P nach Q. Um dies auch im Namen des Vektors zu zeigen, schreibt man oft auch $\overrightarrow{PQ}$ - der <u>Verbindungsvektor</u> von Punkt P nach Q - anstatt $\vec{v}$. Also ist $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ im Beispiel das Gleiche wie $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

2. Der Rückweg (also von Q nach P) wird durch den Vektor $\overrightarrow{QP}$ beschrieben. Diesen „Rückwegvektor“ nennt man <u>Gegenvektor</u>. Beim Gegenvektor ändern sich die Vorzeichen der Koordinaten: $\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

3. Ein Spezialfall dieser Schreibweise ergibt sich, wenn man vom Ursprung des Koordinatensystems (bezeichnet mit dem Buchstaben „O“ für „Origin“) ausgeht: Der Vekor $\overrightarrow{OP}$, vom Ursprung zu Punkt P, hat offensichtlich die Koordinaten des Punktes P(2 | 4) selbst, nämlich: $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

Diesen speziellen, vom *Ursprung* zu P weisenden Vektor nennt man den <u>Ortsvektor</u> von Punkt P.

4. Der Vektor $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (alle Koordinaten gleich Null) heißt <u>Nullvektor</u>.

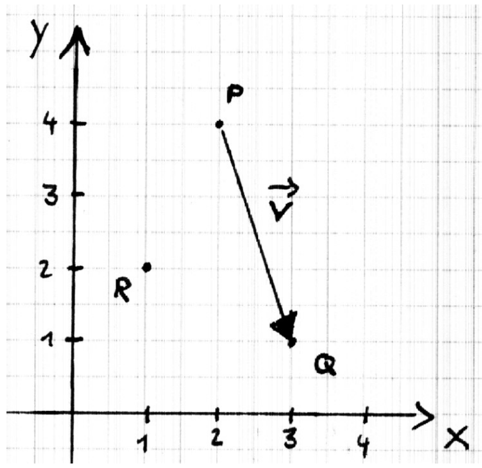
Aufgaben: Der Ortsvektor von Punkt Q lautet:

Der Gegenvektor von $\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ lautet:

Addition von Vektoren

Mit der nebenstehenden Zeichnung gilt:

$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$



Offenbar lassen sich die Koordinaten des Punktes Q berechnen, indem man zu den Koordinaten von P die jeweiligen „Verschiebungssummanden“ addiert:

x-Koordinate von Q: 2 + 1 = 3

y-Koordinate von Q: 4 + (–3) = 1

In Vektorschreibweise notiert man: $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Oder falls die genauen Koordinaten gerade uninteressant sind:

$$\overrightarrow{OP}+\vec{v}=\overrightarrow{OQ}$$

Die **Subtraktion** zweier Vektoren funktioniert ganz ähnlich: $\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$

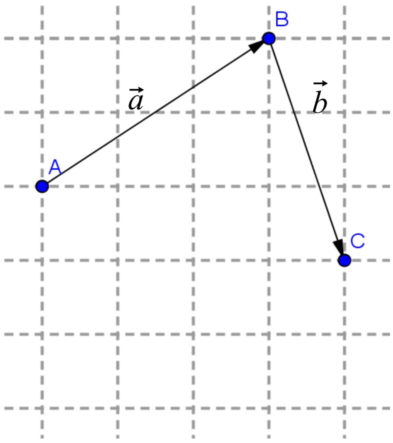
Die Subtraktion zweier Vektoren entspricht also einer Addition mit einem Gegenvektor!

Ein Verbindungsvektor von Punkt P nach Q lässt sich also so berechnen: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

Aufgabe 1: Bestimme zunächst die Vektoren $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{PQ}$ und rechne dann: **a)** $\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}$ **b)** $\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RQ}$ **c)** $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$ **d)** $\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PQ}$

In Aufgabe 1 war der erste Summand immer ein Ortsvektor eines Punktes und die weiteren Summanden schlossen sich wie eine Wegbeschreibung daran an. Z.B. könnte man Teilaufgabe a) folgendermaßen beschreiben: „Gehe zunächst zu Punkt R und dann von R nach P“. Ergebnis war schließlich der Ortsvektor von P.

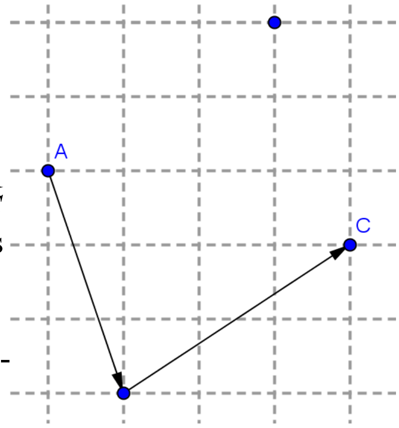
Man kann aber auch Vektorketten ausgehend von beliebigen Punkten (statt vom Nullpunkt) bilden. .



Wir beginnen nun bei einem beliebigen Punkt A und legen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so an, dass wir zu Punkt C gelangen

Es gilt: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Durch Rechnung erhalten wir $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ also den Vektor direkt von A zu C. Aber es geht auch in umgekehrter Reihenfolge (rechtes Bild): Wir lassen Vektor $\vec{b}$ nun bei Punkt A beginnen ($\vec{b}$ ändert sich dadurch nicht) an und benutzen erst im zweiten Schritt Vektor $\vec{a}$. Wir kommen dennoch bei Punkt C an und auch rechnerisch zeigt sich: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AC}$



Aufgabe 2: Wähle einen beliebigen Ausgangspunkt. Folgende sechs Vektoren seien gegeben:

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix},\quad \vec{v}_3=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad \vec{v}_4=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{v}_5=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix},\quad \vec{v}_6=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$$

a) Zeichne die Verkettung der Vektoren ausgehend vom Ausgangspunkt.

b) Was lässt sich aufgrund der Zeichnung über das Ergebnis von $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3+\vec{v}_4+\vec{v}_5+\vec{v}_6$ sagen?

c) Es gibt eine Verkettungsreihenfolge der Vektoren, so dass ein Sechseck entsteht. Welche?

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Grundschule: Statt 9 + 9 + 9 + 9 schreibt man 4 · 9 = 36

Bei Vektoren: Statt $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ schreibt man $4\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$

Geometrisch bedeutet dies:
Der betreffende Vektor wurde um den Faktor 4 gestreckt (die Richtung bleibt jedoch unverändert).

Aufgabe 1 Zeichne ausgehend von einem beliebigen Punkt folgende Vektoren:

a) $1\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ b) $2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ c) $-2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ d) $-0{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 2 Fasse das Ergebnis als Ortsvektor auf und zeichne nur den Punkt im Koordinatensystem

a) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 3 Bestimme den Faktor r

a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\7\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1{,}5\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3{,}5\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$

Dreidimensionale Vektoren

Vektoren können nicht nur zwei, sondern auch drei (oder noch mehr) Koordinaten enthalten. Die bisher für zweidimensionale Vektoren erarbeiteten Rechenregeln kann man problemlos auch auf dreidimensionale Vektoren übertragen. Beispiel:

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$ oder auch $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\9\end{pmatrix}$

Achtung! Verwechselungsgefahr!

Im Zusammenhang mit Vektoren gibt es 3 verschiedene Multiplikationen:

1. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (wie auf dieser Seite erklärt):

„Zahl mal Vektor = Vektor“ Beispiel: $4\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$

(Man spricht auch von „Multiplikation mit einem Skalar“ oder „Skalarmultiplikation“)

2. Skalarprodukt: „Vektor mal Vektor = Zahl“ - Beispiel: $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=1\cdot2+3\cdot5=17$ (kommt später!)

3. Vektorprodukt: „3D-Vektor kreuz 3D-Vektor = 3D-Vektor“ - Beispiel:

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12-15\\12-6\\5-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$ (kommt vielleicht später!)

Rechengesetze

Viele bekannte Rechengesetze gelten auch für Vektoren:

	bei Zahlen:	bei Vektoren:
Kommutativgesetz:	2+3 = 3+2	$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$
Assoziativgesetz (+):	(1+2)+3 = 1+(2+3)	$\left(\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}\right)$
Assoziativgesetz (·):	(2·3)·4 = 2·(3·4)	$(7\cdot 8)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 7\cdot\left(8\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$
Distributivgesetz:	2·(3+4) = 2·3 + 2·4	$5\cdot\left(\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right) = 5\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Vorsicht: Eine Zahl ist kein Vektor, daher ist z.B. der Term $a+\vec{b}$ völliger Unsinn.

Übung: Es sei a=2 und b=3 und c=4, außerdem soll gelten: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{z}=\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$

Berechne (oder markiere als unsinnig):

a) $a\cdot\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}$ **b)** $c\div a\cdot\vec{x}$ **c)** $c\cdot a\div\vec{x}$ **d)** $\vec{x}-\vec{y}-(a\cdot\vec{z})$ **e)** $\vec{x}-(\vec{y}-a)\cdot\vec{z}$

Linearkombination

Ein Term der Form $a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} + c\vec{w} + ...$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ etc. . Mit Linearkombinationen lassen sich z.B. Beweise führen.

Mittelpunkt einer Strecke zwischen zwei Punkten

Sind zwei Punkte P(2 | 4) und Q(3 | 1) gegeben, so ist im Koordinatensystem schnell einsehbar, dass der Mittelpunkt der Strecke PQ der Punkt M(2,5 | 2,5) sein muss.
Dies Ergebnis lässt sich rechnerisch auf zwei verschiedene Möglichkeiten bestätigen:

Erstens: Der Mittelpunkt lässt sich als Mittelwert der Koordinaten auffassen:

$$M\left(\frac{2+3}{2}\,\middle|\,\frac{4+1}{2}\right)=M(2{,}5\,|\,2{,}5)$$

Zweitens: Ausgehend vom Nullpunkt „bewegt" man sich zunächst zum Punkt P (mit dem Ortsvektor von Punkt P) und addiert dann die Hälfte des Verbindungsvektors PQ dazu:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + 0{,}5\cdot\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$$

Diese Ideen funktionieren natürlich auch bei 3-dimensionalen Vektoren entsprechend.