Erste Mathematikklausur in Jgst. Q1/I, Kurs G4
Fachlehrer: Herr Töns Datum: 12.11.2019

Name:

+++++++ Hilfsmittelfreier Teil +++++++
(Zeit für diesen Teil: maximal 30 Minuten)

Aufgabe 1: Funktionsuntersuchung **(22 Pkt)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

a) Erstelle eine Monotonietabelle für die Funktion.

(Zur Kontrolle: f steigt in $]-\infty\,;\,1[$, dann sinkt sie in $]1;3[$, dann steigt sie in $]3;\infty[$)

Lösung: Für eine Monotonietabelle benötigt man die erste Ableitung und deren Nullstellen:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

Nullstellen von f':

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Damit wissen wir, dass diese x-Werte "Begrenzungen" für (mögliche) Monotoniewechsel sind:

Intervall	$]-\infty;1[$	$]1;3[$	$]3;+\infty[$
x_0	0	2	4
$f'(x_0)$	9	−3	9
Monotonie	↗	↘	↗

b) Berechne die Extrempunkte der Funktion f

Verwende für die hinreichende Bedingung die Ergebnisse aus Aufgabenteil a)

Lösung: Die notwendige Bedingung zur Bestimmung von Extrempunkten ist die Suche nach Nullstellen von f ' . Dieses Problem wurde ja schon in Aufgabenteil a) gelöst, d.h. wir können direkt schreiben. Selbst wenn man a) nicht richtig gelöst hat, darf man aber das Kontrollergebnis aus der Aufgabenstellung benutzen: Wir wissen damit nämlich, wo die Nullstellen von f ' liegen:

Notw. Bed.: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Für hinreichende Bedingung dürfen wir auch Aufgabenteil a) nutzen. Selbst wenn man a) nicht richtig gelöst hat, darf man aber das Kontrollergebnis aus der Aufgabenstellung benutzen. Wir wissen also, in welchen Intervallen die Funktion steigt oder fällt, d.h. wir wissen auch, dass an den verdächtigen Stellen in HP bzw. TP liegen muss:

H.B: siehe Monotonietabelle: Max. bei $x = 1$
Min bei $x = 3$

Für Extrempunkte sind aber auch noch die y-Werte erforderlich. Dafür muss man einfach die entsprechenden Funktionswerte einsetzen:

y-Werte: $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$
$f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$

Also TP $(3|1)$
HP $(1|5)$

c) Begründe, ob die Funktion achsen- oder punktsymmetrisch ist.

Lösung: Das Kriterium für Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen kennen wir: Man argumentiert über alle Exponenten von x.

Keine Standardsymmetrie, da gerade und ungerade Exponenten von x vorkommen.

d) Gib das Fernverhalten der Funktion an.
Lösung: "Gib an" bedeutet: nur Ergebnis hinschreiben. Dazu muss man natürlich wissen, wie man so etwas richtig notiert. In diesem Fall:

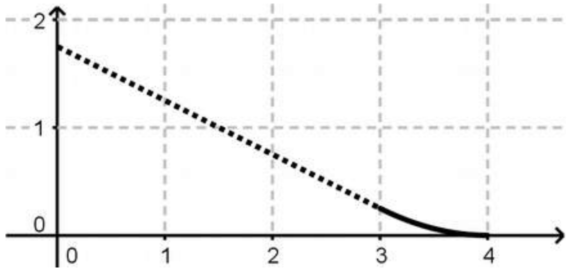
$$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} +\infty \qquad\qquad f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$$

e) Begründe durch Rechnung: Es existiert keine Tangente an f mit der Steigung m = –21 .
Lösung: Wenn man die Worte "Tangente an f " liest, dann muss man sofort auch an f ' denken, denn die Ableitungsfunktion ist doch nichts anderes als die Steigung der Tangente an f bei einem bestimmten x-Wert. Mathematisch gesprochen ist hier also verlangt: Weise nach, dass die Ableitung von f niemals den Wert -21 annimmt:

$$\begin{aligned} f'(x) \overset{?}{=} -21 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 12x + 9 = -21 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = -7 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 10 = 0 \qquad | \text{ pq Formel} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{\underbrace{4-10}_{<0}} \qquad \text{↯ keine Lösung} \end{aligned}$$

Da es keine Lösung gibt, ist der Nachweis gelungen.

Aufgabe 2: „Rutsche“ (8 Pkt)
In einem Koordinatensystem soll eine „Rutsche“ entworfen werden, welche aus einem Geradenstück (gepunktet dargestellt) und einem Parabelstück (durchgezogenes, gebogenes Stück am Ende) besteht.



Für das Parabelstück gilt:
$p(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4$ für $x \in [\,3\,;\,4\,]$

a) Bestimme den y-Wert und die Ableitung von p an der Stelle $x = 3$ (also p(3) und p'(3)).
Lösung: Den y-Wert von p bestimmt man durch Einsetzen des entsprechenden x-Wertes in die Funktion. Die Ableitung von p an einer Stelle bestimmt man durch Einsetzen des entsprechenden x-Wertes in die Ableitungsfunktion. Wir bestimmen also zunächst die Ableitung und bestimmen dann die beiden gefragen Werte:

$$p(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 \qquad p(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 4 = \frac{9}{4} - 6 + 4 = \frac{1}{4}$$

$$p'(x) = \frac{1}{2}x - 2 \qquad p'(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 - 2 = -0{,}5$$

b) Bestimme die Gleichung des gepunkteten Geradenstücks.
Hinweise: Das Geradenstück soll sich natürlich ohne „Lücke“ und ohne „Knick“ an der Stelle x=3 an den Parabelbogen anschließen!
Lösung: Wir suchen eine Gerade. Daher muss man wissen, wie eine Gerade im Allgemeinen aussieht. Eine Gerade hat eine Steigung und einen y-Achsenabschnitt. Diese konkreten Werte müssen wir finden. Die Steigung wurde schon in Aufgabenteil a) bestimmt, dies ist die Ableitung an der Stelle x=3. Was fehlt, ist der y-Achsenabschnitt. Da wir wissen, dass die Gerade durch den Punkt (3| ¼) verläuft (siehe Teil a) können wir einfach diesen Punkt in die Gleichung mit dem noch unbekannten y-Achsenabschnitt b einsetzen:

Allgemeine Geradenform : $g(x) = mx + b$

$g(3) = \frac{1}{4}$ und $g'(3) = -0{,}5 \Rightarrow m = -0{,}5$

Also $-0{,}5 \cdot 3 + b = \frac{1}{4}$ Also $g(x) = -0{,}5x + 1{,}75$

$\Leftrightarrow$ $b = 1{,}75$

Erste Mathematikklausur in Jgst. Q1/I, Kurs G4

Fachlehrer: Herr Töns Datum: 12.11.2019

Zeit: Insgesamt 2 Schulstunden . Es werden 30+60 Punkte vergeben.

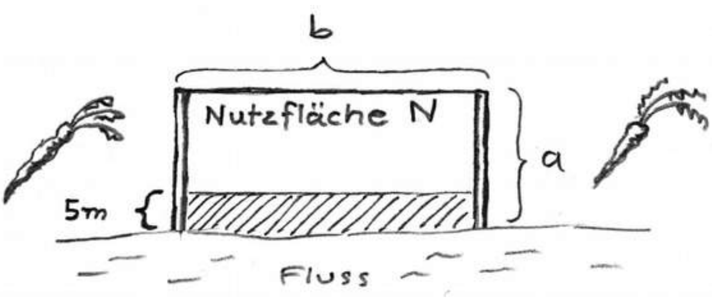
Hinweise zu den Operatoren:

• Die Formulierung "Gib an" bedeutet, dass nur das Ergebnis ohne Erklärung verlang ist.

• Die Formulierung "Bestimme" bedeutet, dass notiert werden muss, wie das Ergebnis lautet und wie man darauf kommt. Dabei darf auch z.B. das Grafikmenü benutzt werden.

• Die Formulierung "Bestimme rechnerisch" bedeutet, dass alle Berechnungsansätze notiert werden müssen, wobei die eigentliche Berechnung aber mit dem GTR erfolgen darf.

Aufgabe 3: Extremwertaufgabe (15Pkt)



Wie im Unterricht soll auch diesmal eine rechteckige Ziegenwiese an einem Fluss abgezäunt werden, wobei an der Uferseite kein Zaun benötigt wird.
Außerdem ist ein 5 Meter breiter Streifen (schraffiert) am Ufer nicht als Weideland nutzbar.
Schließlich befinden sich rechts und links von der Wiese Karottenfelder, welches die Ziege dazu veranlasst, den Zaun an beiden "a-Seiten" (nicht aber an der "b-Seite") ständig zu attackieren. Der Bauer entschließt sich deswegen dazu, auf beiden "a-Seiten" den Zaun doppelt zu installieren, so dass die benötigte Zaunlänge entsprechend steigt.
Es stehen 100m Zaun zur Verfügung. Damit soll das rechteckige Gebiet eingezäunt werden.

a) Mögliche Werte für a und b (so dass die 100m Zaun kompett verwendet werden) sind a = 10m und b = 60m . Berechne die für diese Rechteckmaße entstehende Nutzfläche.

Lösung: Das gesamte Rechteck (also Nutzfläche N plus schraffierte Uferfläche) berechnet sich einfach mit der Rechteck-Flächenformel "Rechteckfläche = Breite mal Höhe". Von dieser Fläche muss aber die Uferfläche abgezogen werden, damit man die reine Nutzfläche erhält. Man rechnet:

$$\text{Nutzfläche} = a \cdot b - 5 \cdot b = 10 \cdot 60 - 5 \cdot 60 = 300\,m^2$$

b) Es sollen nun die Maße für a und b gefunden werden, welche die größtmögliche Nutzfläche erzeugen. Weise nach, dass die Funktion $N(a) = -4a^2 + 120a - 500$ eine Zielfunktion für das Extremwertproblem ist.

Lösung: Wenn man einen Nachweis erbringen soll, dann kann man nicht einfach das angegebene Ergebnis benutzen und zeigen, dass das Zahlenbeispiel aus Aufgabenteil a) passt. (Das tut es natürlich, aber es ist kein Nachweis.) Man muss also selbst auf die Formel kommen. Man überlegt sich, wie in Aufgabenteil a), dass man von der gesamten Rechteckfläche den schraffierten Uferteil abzieht. Diese Formel hängt noch von a UND b ab. Aber es gibt ja noch die Nebenbedingung, dass die Zaunlänge nur 100 Meter betragen darf. Nachdem man die Nebenbedingung (wie wir es immer getan haben) ind die Zielfunktion eingesetzt hat, muss man noch soweit umformen, dass die Funktion aus der Aufgabenstellung herauskommt. Dazu muss man Rechenregeln beherrschen!

Nutzfläche $= a \cdot b - 5 \cdot b$ (Zielfunktion)

$4a + b = 100 \iff b = 100 - 4a$ (Nebenbedingung)

Nebenbedingung einsetzen: $N(a) = a \cdot (100-4a) - 5 \cdot (100-4a)$

$= 100a - 4a^2 - 500 + 20a$

$= -4a^2 + 120a - 500$

c) Bestimme (also mit Hilfe des GTR im Grafikmenü, d.h. ohne Ableitungsbestimmung etc.) den Wert für a, bei dem die Fläche maximal groß wird. Gib ebenfalls den Wert für die maximal große Nutzfläche an und berechne schließlich den dazu passenden Wert für b.

Lösung: Die in Teil b) angegebene Funktion N(a) liefert offenbar für jeden Wert für a die entstehende Nutzfläche (d.h. die "x-Werte" der Funktion sind keine "x-Werte", sondern "a-Werte". Und die y-Werte dieser Funktion sind Flächenmaße für die Nutzfläche). Von dieser Funktion ermittelt man das Maximum:

Maximum von $N(a)$ liegt laut GTR bei $a = 15$ und $N(15) = 400$, D.h. die maximal große Nutzfläche von $400m^2$ wird für $a = 15m$ und $b = 100 - 4 \cdot 15 = 40m$ erreicht.

Um den Wert für b zu bestimmen, kann man entweder die Formel für die Nebenbedingung aus Aufgabenteil b) benutzen. Oder man macht sich klar, dass man für die "a-Seiten" bereits 4·15m verbraucht wurden, so dass für die "b-Seite" nur noch 40m übrigbleibt.

Aufgabe 4: Steckbriefaufgaben **(11Pkt)**

a) Bestimme den Funktionsterm einer Parabel, welche durch folgende Punkte verläuft:

A(2| -4) B(3|10) C(4|28)

Lösung: In der Aufgabe steht "Parabel". Wir suchen also eine quadratische Funktion!

Allg. Form: $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & p(2) = -4 & \longrightarrow 4a + 2b + c = -4 \\ \text{II} & p(3) = 10 & \longrightarrow 9a + 3b + c = 10 \\ \text{III} & p(4) = 28 & \longrightarrow 16a + 4b + c = 28 \end{array}\right\} \text{GTR:} \begin{array}{l} a=2 \\ b=4 \\ c=-20 \end{array}$$

Also $p(x) = 2x^2 + 4x - 20$

b) Bestimme den Funktionsterm einer Parabel, welche durch folgende Punkte verläuft:

A(0,5| 5,5) und Scheitelpunkt S(-0,5 | 3,5)

Lösung: Hier sind für die quadratische Funktion nur zwei Punkte gegeben. Der zweite Punkt ist aber ein Scheitelpunkt, d.h. beim Punkt S liegt ein Hoch- oder Tiefpunkt vor. Und an diesen Stellen hat die Ableitungsfunktion den Wert Null! Außerdem muss man bei den Minuszeichen aufpassen: Wenn negative Zahlen quadriert werden, verschwindet das Minuszeichen! (Siehe Gleichung 2)

Allg. Form $p(x) = ax^2 + bx + c$ und $p'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & p(0{,}5) = 5{,}5 & \longrightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 5{,}5 \\ \text{II} & p(-0{,}5) = 3{,}5 & \longrightarrow \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c = 3{,}5 \\ \text{III} & p'(-0{,}5) = 0 & \longrightarrow -a + b = 0 \end{array}\right\} \text{GTR:} \begin{array}{l} a=2 \\ b=2 \\ c=4 \end{array}$$

Also $p(x) = 2x^2 + 2x + 4$

c) Jemand versucht erfolglos eine Parabelfunktion durch folgende drei Punkte zu legen:

A(1,6 | 3) B(2,4 | 5) C $\left(\frac{8}{5} \,\middle|\, 6\right)$

Begründe, warum es keine Funktion durch diese drei Punkte geben kann!

Lösung: Wenn man sich die Punkte in ein Koordinatensystem zeichnet, oder das Gleichungssystem aufstellt, sollte einem folgendes auffallen:

Die x-Werte der Punkte A und C sind identisch, denn $1{,}6 = \frac{8}{5}$. Die y-Werte sind jedoch unterschiedlich: Eine Funktion kann zu einem x-Wert jedoch nicht unterschiedliche y-Werte besitzen!

Aufgabe 5: Funktionenschar **(15 Punkte)**

Gegeben ist die Parabelschar $f_a(x) = x^2 - 6\mathbf{a}x + 2$ welche den Parameter **a** enthält.

a) Bestimme die Ableitung von f_a und berechne schließlich (unter Verwendung der notwendigen und hinreichen Bedingung für Extrempunkte) den x-Wert des Scheitelpunkts der Schar in Abhängigkeit von a. (Zur Kontrolle: x = 3a)

Lösung: Für die Extrempunktberechnung (hier ist es ein Scheitelpunkt einer Parabel) spult man das bekannte Rezept ab. Ableitung bestimmen, Ableitung gleich Null setzen und auflösen. Man muss nur die entsprechende Vorsicht beim Parameter walten lassen.

Die hinreichende kann man ja sowohl mit f '' als auch mit einer Monotonietabelle erledigen. Da f '' hier außerordentlich einfach ist, benutzt man natürlich diese dafür.

) $f_a(x) = x^2 - 6ax + 2$ $f_a'(x) = 2x - 6a$ $f_a''(x) = 2$

NB für Ex.: $f_a'(x) = 0 \iff 2x - 6a = 0 \iff x = 3a$

HB für Ex: $f_a'(3a) = 0$ und $f_a''(3a) = 2 \Rightarrow$ TP bei $x = 3a$

b) Berechne den y-Wert des Scheitelpunktes und fasse so weit wie möglich zusammen!

Lösung: y-Wert berechnen heißt: x-Wert aus Aufgabenteil a in die Funktion einsetzen. Hier muss man wieder aufpassen, was genau denn quadriert wird: Wenn man für x nun 3a einsetzt, wird eben (3a)² gerechnet, und nicht etwa 3a² (was etwas ganz anderes ist!):

$$f_a(3a) = (3a)^2 - 6a \cdot 3a + 2 = 9a^2 - 18a^2 + 2 = -9a^2 + 2$$

c) Berechne einen Wert für a, so dass der Punkt P(2 | –54) auf der Parabel liegt.

Lösung: Ansatz: Man führt eine Punktprobe durch. Diese gelingt nur für einen bestimmten Wert für a. Anders gesagt: der Punkt P liegt dann auf der Parabel, wenn man als x-Wert die Zahl 2 in die Funktion einsetzt und -54 herausbekommt:

$$f_a(2) = -54 \iff 2^2 - 6a \cdot 2 + 2 = -54 \iff 6 - 12a = -54$$
$$a = 5$$

d) Entscheide begründet, ob es einen Wert für a gibt, so dass die Funktion achsensymmetrisch ist.

Lösung: Eine Aufgabe für Leute, die über den Tellerrand gucken können. Normalerweise enthält die Funktion ja den Teil "6ax", d.h. einen Teil mit "x hoch 1", so dass Achsensymmetrie eigentlich nicht in Frage kommt. Aber:

Für a = 0 erhält man die achsensymmetrische Funktion $f_0(x) = x^2 + 2$

Aufgabe 6: Funktionsuntersuchung **(11 Punkte)**

Gegeben: $f(x) = (x-2)^2 \cdot x \cdot (x+1)$

a) Gib die Nullstellen der Funktion f an!

Lösung: Die Anweisung "Gib an" weist erstens darauf hin, dass man einfach nur ein Ergebnis hinschreiben muss. Deshalb kann es dafür auch nicht wahnsinnig viele Punkte geben. Ausführliche Rechnungen sind hier also fehl am Platze. Außerdem sollte man schon ahnen, dass – wenn man die Funktion tatsächlich erstmal ausmultiplizieren würde – irgendwas mit "x hoch 4" vorkommen wird, was mit unseren Mitteln erstmal nicht so einfach zu erledigen ist. Das würde in eine Sackgasse führen.

Man sollte aber direkt sehen, dass der Funktionsterm aus einzelnen Faktoren besteht! Und dass dann der Satz vom Nullprodukt direkt anwendbar ist:

$$f(x) = 0 \overset{SvNP}{\iff} x = 2 \lor x = 0 \lor x = -1$$

b) Weise durch Rechnung (ohne GTR-Hilfe) nach, dass gilt: $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4$

Lösung: Was bei Aufgabenteil a) ein Vorteil war (Funktionsterm aus einzelnen Faktoren) ist jetzt ein Nachteil, denn so wie f da steht, können wir ihn nicht direkt ableiten. Wir müssen den Term also in Normalform bringen, d.h. wir müssen nun tatsächlich ausmultiplizieren.

Was natürlich nicht gilt ist, sich durch schlaues zurechtlegen ein passendes f zur Ableitung f ' zu basteln. Man rechnet nun also:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^2 \cdot x \cdot (x+1) = (x^2 - 4x + 4) \cdot (x^2 + x) \\ &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x^3 - 4x^2 + 4x \\ &= x^4 - 3x^3 + 4x \quad \text{und} \quad f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4 \end{aligned}$$

c) Bestimme die Wendepunkte der Funktion! (GTR-Hilfe nutzen!)

Lösung: Wenn man die Ableitung hat (ist in Teil b) angegeben) dann kann man auch schnell f '' und f ''' bestimmen. Bei der Notwendigen Bedingung für Wendepunkte sucht man die Nullstellen von f ''. Diese kann man entweder fix ausrechnen (hier ists relativ einfach) oder man lässt sie vom GTR bestimmen (Grafikmenü, Nullstellen einer Funktion – hier von f '')

Nach der Hinreichenden Bedingung muss man noch die y-Werte bestimmen. Dies macht man am besten wieder im Grafikmenü mit der Trace-Funktion.

$$f''(x) = 12x^2 - 18x \qquad f'''(x) = 24x - 18$$

$\underline{NB}$ $f''(x) = 0 \iff x = 0 \lor x = 1{,}5$

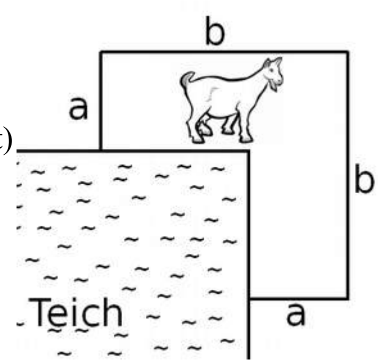
$\underline{HB}$ $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = -18$ WP bei $x = 0$

$f''(1{,}5) = 0$ und $f'''(1{,}5) = 18$ WP bei $x = 1{,}5$

y-Werte: $(0 \mid 0)$ und $(1{,}5 \mid \overset{GTR}{0{,}9375})$

Aufgabe 7: Ziegenwiese am Teich (8 Punkte)

Bei dieser Situation möchte der Ziegenhirte die Wiese an der rechtwinkligen Ecke eines Teiches einzäunen. Die natürliche Grenze des Teichufers muss nicht abgezäunt werden, so dass - wie in der Abbildung ersichtlich - vier Strecken (jeweils mit a und b bezeichnet) Zaun benötigt werden. Die Wiese hat an den Zaunecken nur rechte Winkel.



a) Es steht 100 Meter Zaun zur Verfügung. Eine mögliche Wahl für die Zaunlängen a und b sind:

a = 10 Meter und b = 40 Meter. Mit diesen Abmessungen wäre die Wiese 700m² groß.

Gib ein weiteres Zahlenbeispiel an (also Werte für a, b und die Fläche)!

Lösung: Wenn schon ein Zahlenbeispiel da steht, ist es sicherlich dafür gedacht, dass man es ersteinmal nachvollzieht. Zunächst sollte man sich klarmachen, dass die Zaunlänge des Zahlenbeispiels wirklich 100 Meter beträgt. Auf die 700m² kommt man entweder mit der Idee aus der Musterlösung (schraffiertes Quadrat vom großen Quadrat abziehen) oder wennm an die Wiesenfläche in zwei Rechtecke zerlegt. In jedem Fall muss man sich klarmachen, dass jede Wiesenseite am Teich die Länge (b-a) haben muss.

$a = 20m \quad b = 30m \quad$ Fläche $= b^2 - (b-a)^2 = 800m^2$

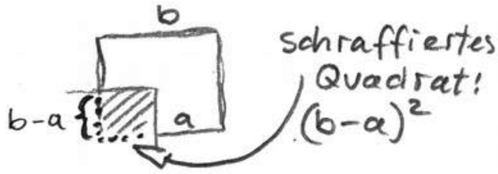
$a = 5m \quad b = 45m \quad$ Fläche $= 425m^2$

$a = 15m \quad b = 35m \quad$ Fläche $= 825m^2$

b) Wie immer soll nun eine Kombination von Werten für a und b gefunden werden, so dass die entstehende Wiese maximal groß wird. Ermittle eine Zielfunktion für dieses Extremwertproblem.

Lösung: Wie immer bei Extremwertaufgaben benötigt man eine Zielfunktion und eine Nebenbedingung, die man schließlich in die Zielfunktion einsetzt. Die Zahlenbeispiele aus Teil a sollten auf die Ideen für Teil b vorbereiten.

Fläche $= b^2 - (b-a)^2$



Nebenbed.: $2a + 2b = 100$

$\Leftrightarrow \quad a = 50 - b$

Zielfunktion: $F(b) = b^2 - (b-(50-b))^2$

(Extremum mit GTR: $b = 33,\overline{3}$ Fläche $= 833,\overline{3}$)

Viel Erfolg!