# Übungen zur Kombinatorik

**Schichtplan:** Am Haupteingang eines Unternehmens muss der Empfang auch am Sonntag stets besetzt sein. Die Chefin muss die Früh-, Mittags- und Spätschicht besetzen. Dafür stehen fünf Mitarbeiter (Anna, Ben, Chris, Dani und Eddi) zur Verfügung. Jeder Mitarbeiter übernimmt höchstens eine der drei Schichten. Wieviele mögliche Schichtpläne kann es am Sonntag geben?

**Lösung**: Der Sachverhalt entspricht einer Ziehung
- ohne Zurücklegen (denn ein Mitarbeiter kann nicht doppelt verplant werden)
- mit Beachtung der Reihenfolge (denn der der Plan (Anna, Ben, Chris) ist ein anderer als (Ben, Chris, Anna) )

von k = 3 Kugeln (3 verplante Mitarbeiter) aus einem Behälter mit n = 5 Kugeln (Mitarbeiter insg.).

Anzahl Möglichkeiten = $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1} = 5\cdot4\cdot3 = 80$

*Vorsicht: Dies ist nicht der Binomialkoeffizient!*

❖❖❖❖❖❖

**Zeitschrift:** Aus einer Zeitschrift mit 10 Blättern (also mit 20 Seitenzahlen) werden drei Blätter herausgerissen. Wieviele mögliche "kaputte" Zeitschriften kann es geben?

**Lösung**: Der Sachverhalt entspricht einer Ziehung
- ohne Zurücklegen (denn eine Seite kann nicht doppelt herausgerissen werden)
- ohne Beachtung der Reihenfolge (denn es ist egal, ob man z.B. in der Reihenfolge (3,8,9) oder in der Reihenfolge (9,3,8) die Seiteh herausreißt)

von k = 3 Kugeln (entfernte Blätter) aus einem Behälter mit n = 10 Kugeln (Blätter insgesamt).

Anzahl Möglichkeiten = $\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!\cdot3!} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = \frac{720}{6} = 120$

*Hinweis: Dies ist die Formel, die auch bei Bernoulliketten verwendet wird, da man ja die Anzahl der Möglichkeiten zählen will, bei einer Gesamtzahl von 10 Versuchen (hier: 10 Seiten) genau 3 Treffer (hier: 3 herausgerissene Seiten) zu erzielen.*

❖❖❖❖❖❖

**Geldbörse:** Eine Geldbörse enthält folgende Münzen: 1ct, 2ct, 5ct, 10ct, 20ct, und 50ct. Vier Münzen werden nun zufällig ohne Zurücklegen entnommen. Wie groß ist die Anzahl der unterschiedlichen Beträge, die man entnehmen kann?

**Lösung**: Der Sachverhalt entspricht einer Ziehung
- ohne Zurücklegen (steht genau so in der Aufgabenstellung)
- ohne Beachtung der Reihenfolge (denn zur Berechnung des Endbetrages ist es egal ob man z.B. 1ct + 2ct + 5ct + 10ct rechnet oder in einer anderen Reihenfolge)

von k = 4 Kugeln (entnommene Münzen) aus einem Behälter mit n = 6 Kugeln (wegen 6 möglicher Münzen). Rechnung:

Anzahl Möglichkeiten = $\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!\cdot4!} = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = \frac{30}{2} = 15$

**Klassenraumtüren Teil 1:** In einer Schule gibt es 20 Türen für die 20 Klassenräume. An einem Nachmittag laufen Fünftklässler durch die Schule an allen Klassenräumen vorbei und reißen wahllos Türen auf. Am Abend stehen eine unbekannte Anzahl Türen offen während der Rest geschlossen ist.
Wie viele unterschiedliche Zustände gibt es, in der die Kinder die Schule hinterlassen können?

**Lösung**: Der Sachverhalt entspricht einer 20-fachen Ziehung (k = 20) einer Kugel aus einem Behälter mit 2 Kugeln (n = 2, für die beiden Zustände "Tür offen" oder "geschlossen")
- mit Zurücklegen (denn die offen/geschlossen-Entscheidung wird für jede Tür erneut gefällt)
- mit Beachtung der Reihenfolge (denn "Tür 1 offen" ist etwas anderes als "Tür 5 offen")

Rechnung: Anzahl Möglichkeiten = $2^{20} = 1048576$

*Hinweis: Es erscheint möglicherweise seltsam, das Modell auf diese Art und Weise zu wählen. Man könnte auf den Gedanken kommen, ein Modell zu wählen, wo k der Anzahl offener Türen entspricht. Da wir diese Zahl aber gar nicht kennen, kommt man damit nicht weiter. Ein verwandtes Problem erfordert aber genau jene Herangehensweise, wie die nächste Aufgabe zeigt.*

❖❖❖❖❖❖

**Klassenraumtüren Teil 2:** In einer Schule gibt es 20 Türen für die 20 Klassenräume. An einem Nachmittag laufen Fünftklässler durch die Schule an allen Klassenräumen vorbei und reißen wahllos Türen auf. Am Abend stehen exakt fünf Türen offen während der Rest geschlossen ist.
Wie viele unterschiedliche Zustände gibt es, in der die Kinder die Schule hinterlassen können?

**Lösung**: Der Sachverhalt entspricht einer Ziehung
- ohne Zurücklegen (denn eine Tür kann nicht "doppelt offen" stehen)
- ohne Beachtung der Reihenfolge (denn es ist egal, ob die Türen in der Reihenfolge (1,3,5,8,9) oder in der Reihenfolge (9,8,1,3,5) geöffnet wurden)

von k = 5 Kugeln (Anzahl offener Türen) aus einem Behälter mit n = 20 Kugeln (Türen insgesamt).
Rechnung:

Anzahl Möglichkeiten = $\binom{20}{5} = \frac{20!}{(20-5)!\cdot 5!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 15504$

❖❖❖❖❖❖

**Anagramm:** Ein Anagramm des Wortes "MATHE" ist z.B. das Wort "THEMA", also ein weiteres Wort, welches nur durch Umsortierung der Buchstaben des Ursprungswortes entstanden ist. Dabei können natürlich auch sinnlose, nicht existierende Worte wie "HETAM" entstehen.
Wieviele Anagramme des Wortes "MATHE" lassen sich bilden?

**Lösung**: Der Sachverhalt entspricht einer Ziehung
- ohne Zurücklegen (denn ein Buchstabe kann nicht mehrfach verwendet werden)
- mit Beachtung der Reihenfolge ( denn "THEMA" ist ein anderes Wort als "HETAM")

von k = 5 Kugeln (Buchstaben des Zielworts) aus einem Behälter mit n = 5 (Buchstabenvorrat) Kugeln. Rechnung:

Anzahl Möglichkeiten = $\frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1} = 120$

*Hinweis 1: Es gilt, dass 0! = 1 ist, daher wird der Nenner 1.*
*Hinweis 2: Strenggenommen ist das Wort MATHE selbst kein Anagramm von MATHE. Daher müsste man die obige Lösung 120 ggf. auf 119 korrigieren.*
*Hinweis 3: Im Wort MATHE kommt kein Buchstabe doppelt vor. Die Anzahl von Anagrammen von Worten wie KLAMMERAFFE ist daher wesentlich kniffliger zu bestimmen.*