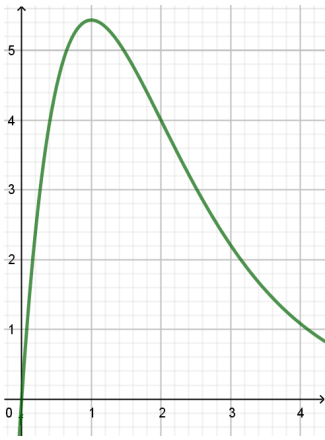
Beispielaufgabe: Funktionen im Sachzusammenhang



Ein Satellit wird zum Zeitpunkt t = 0 von einer Raumfähre ausgeklinkt. Mittels eines eigenen Antriebs gewinnt er erst an Geschwindigkeit. Der Antrieb lässt dann langsam nach, so dass die Geschwindigkeit wieder abnimmt.
Die Geschwindigkeit in km/h wird beschrieben durch
$f(t)=2\cdot t\cdot e^{(-t+2)}$ wobei t ≥ 0, t in Std.

a) Bestimme die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 4 .
b) Bestimme die Nullstelle von f und interpretiere.
c) Bestimme die maximale Geschwindigkeit des Satelliten.
d) Bestimme die minimale Geschwindigkeit des Satelliten.
e) Bestimme den Zeitpunkt, an dem die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt.
f) Bei t=1 wird die maximale Geschwindigkeit erreicht. Beurteile, ob die Geschwindigkeit im Intervall [0;1] genauso zunimmt, wie sie im Intervall [1;2] abnimmt, d.h. ob sie achsensymmetrisch zur Achse t=1 ist.
g) Bestimme durch Betrachtung des Ableitungsmechanismus eine Stammfunktion von f.
h) Bestimme die Strecke, die der Satellit in 4 Stunden zurückgelegt hat.
i) Gib eine Funktion für die zurückgelegte Strecke nach x Stunden an!
j) Gib das Fernverhalten für diese Funktion an und interpretiere.

Lösungen:
a) f(4) = 1.08

b) $f(t) = 0$

$2t\, e^{(-t+2)} = 0 \quad | \text{ SvNP}$

$2t = 0$ oder $e^{(-t+2)} = 0$

$t = 0$ ↯

Bedeutung: zum Zeitpunkt t=0 hat der Satellit keine Geschwindigkeit.

c) $f'(t) = 2 \cdot e^{(-t+2)} + 2t \cdot (-1) \cdot e^{(-t+2)}$

$= (2-2t) \cdot e^{(-t+2)}$

NB für Extrema:

$f'(t) = 0 \quad | \text{SvNP}$

$2-2t = 0$ oder $e^{(\dots)} = 0$ ↯

$t = 1$

$f(1) = 2e \approx 5{,}4$

Linker Rand: $f(0) = 0$

Fernverhalten $f(t) \xrightarrow{t \to \infty} \text{"}\infty \cdot 0\text{"} = 0$

($e^{(\dots)}$ dominiert)

Also Maximum $(1 | 2e)$

(Hinreichende Bedingung ist hier nicht notwendig! Warum?)

d) Da es keine weiteren lokalen Extremstellen gibt, muss das Minimum am Rand angenommen werden. Minimum ist bei t = 0 (Randextremum!). Beim Fernverhalten für t $\to \infty$ wird ebenfalls kein kleinerer Wert angenommen.

e) Wendestelle (RL) bei t = 2

e) $f''(t) = (-2)e^{(-t+2)} + (2-2t)(-1) \cdot e^{(-t+2)}$

$= (2t-4) \cdot e^{(-t+2)}$

Maxima von f' gesucht

($\hat{=}$ Wendestellen)

NB: $f''(t) = 0 \quad | \text{SvNP}$

... $t = 2$ und $f'(2) = -2$

Ränder: $f'(0) = 2e^2$ (Zunahme!)

und $f'(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$

Also stärkste Abnahme bei $t=2$

(Hinreichende Bedingung ist hier nicht notwendig! Warum?)

f) f(0.5) ≠ f(1.5) , also kann keine Symmetrie vorliegen

g) $F(t)=(-2t-2)\cdot e^{(2-t)}$

h) Integral von 0 bis 4 ist ca 13.425

i) $S(t)=F(t)-F(0)=F(t)-(-2e^2)=F(t)+2e^2$

j) Fernverhalten für t → unendlich: $2e^2$, also ist die zurückgelegte Strecke endlich und es werden langfristig knapp $2e^2 \approx 14{,}778$ Kilometer zurückgelegt