Konkretisierung der „Unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Abiturprüfungen an Gymnasien, Gesamtschulen, Waldorfsch. und für Externe“

siehe:https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/zentralabitur-gost/faecher/fach.php?fach=2
siehe auch: Lehrplan Mathe: https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf

Diese Auflistung erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Ebenso sind möglicherweise Themen enthalten, die nicht abiturrelevant sind. **Ganz allgemein gilt: Rechentechnik** im Blut haben! (Bruchrechnung, Term- und Gleichungsumformungen, Potenzrechnung)

1. Funktionen und Analysis: Funktionen als Mathematische Modelle / Fortführung der Differenzialrechnung / Untersuchung von ganzrationalen Funktionen / Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)\cdot e^{ax+b}$ wobei p(x) ein Polynom mit maximal 3 Summanden ist / Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben / Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen, notwendige Ableitungregeln (Produkt- und Kettenregel)

Alle Aspekte der **Kurvenuntersuchung** können: Nullstellen (quadr. Gleichungen, x ausklammern, Satz vom Nullprodukt, biquadratische Gleichungen), Ableiten, Bestimmung von Extrempunkten / Wendepunkten mitsamt sauberer Abhandlung der notwendigen und hinreichenden Bedingung. Einfache Symmetrie (also Achsensymmetrie oder Punktsymmetrie zum Nullpunkt) nachweisen können (indem man bei ganzrat. Fkt. Exponenten untersucht. Aber auch die allg. Idee $f(x) = f(-x)$ bzw. $f(x) = - f(-x)$ verstehen und ggf. anwenden können). Transformationen in x und y Richtung, Streckungen / Stauchungen (insb. Spiegelungen als Streckung mit dem Faktor (-1)), Fernverhalten bestimmen. Kurven skizzieren können. Funktionsgleichungen von Tangenten (und Normalen) in einem Punkt eines Graphen bestimmen können. Unterschied durchschnittliche Änderungsrate (Sekantensteigung) und momentane Änderungsrate (Ableitung) kennen und anwenden können. Randwertprobleme bei begrenztem Definitionsbereich. Die Ableitungsregeln „Kettenregel“ und „Produktregel“ souverän anwenden können: Was sind z.B. die Ableitungen von $f(x)=(x^3+x^2)^{40}$ (Kettenregel!) oder $f(x) = x\cdot e^x$ (Produktregel!) oder $f(x) = 3x^2\cdot e^{7x+4}$ (beide Regeln kombiniert!)? Bedeutung der 1. Ableitung (Tangentensteigung) und 2. Ableitung (Krümmung)
Extremwertaufgaben: Funktionen aufstellen und untersuchen können, den Sachzusammenhang im Blick behalten. Tipp: Zuerst konkrete Beispiele durchrechnen, um ein Gefühl zu bekommen.
Kurvenscharen: Alle Aspekte der Kurvendiskussion bei ganzrationalen Funktionen auch mit Parameter durchführen können. (Hinweis: Beim Ableiten / Integrieren verhält sich ein Parameter wie eine normale Zahl: Z.B. $f(x) = e^a + 3ax^2 + 5a + e^{ax} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0 + 6ax + 0 + ae^{ax}$)
Ortskurven von z.B. HP ermitteln können: Dazu den HP in die Form HP(t | O(t)) bringen.
Exponentialfunktionen sind Funktionen der Form $f(x) = c \cdot a^x$. Potenzgesetze anwenden können um Funktionsterme auf die Form $c \cdot a^x$ bringen zu können. Basiswechseltrick bei Exp.Fkt: (Dazu Logarithmus anwenden: Wegen $e^{\ln(a)} = a$ gilt: $a^x = e^{x\cdot\ln(a)}$). Die Zahl e = 2.718... benutzen können. Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ hat die Ableitung $f'(x) = e^x$. Dies macht die Anwendung der Kettenregel besonders einfach: $f(x) = e^{5x^3} \rightarrow f'(x) = 15x^2\cdot e^{5x^3}$. Gleichungen der Form $e^{3x} = 7$ mit Hilfe des Logarithmus lösen können. Zusammengesetzte Funktionen untersuchen können (z.B. $f(x) = (x^3 - 4x)\cdot e^{7x+4}$) - dies kommt oft in Sachzusammenhängen vor!
Steckbriefaufgaben: Funktion ermitteln, die durch bestimmte Punkte verläuft. (Klassiker: ganzrat. Fkt. durch bestimmte Punkte oder $f(x) = c\cdot a^x$ finden). Dabei Gleichungen aufstellen und lösen.
<u>Integralrechnung / Grundverständnis des Integralbegriffs</u>: Stammfunktionen: Definition, (Merke: zu *einer* Funktion gibt es *genau eine* Ableitung aber *viele* Stammfunktionen!) und Ermittlung von Stfkt. (Also Potenzregel „rückwärts“ können: $f(x) = 5x^3 \rightarrow F(x) = {}^5/_4\, x^4$ und bei e-Funktionen einen guten Riecher haben: $f(x) = e^{2x} \rightarrow F(x) = ½\, e^{2x}$ oder $f(x) = 2x\cdot e^{(x^2)} \rightarrow F(x) = e^{(x^2)}$)
Berechnung von Integralen mit Hilfe von Stammfkt. Fläche zwischen Kurve und x-Achse. Wissen, dass Flächen unter der x-Achse „negativ gezählt“ werden. Wissen, was $\int f(x)\, dx = 0$ bedeutet („Bilanzsumme“!). Fläche, die von zwei Funktionen eingeschlossen wird. Anwendungen: z.B. von der (Wachstums-)Geschwindigkeit zur Strecke (Größe) oder allgemein: Von der mom. Änderungsrate zur Ursprungsgröße. Mittelwerte von Fkt. Uneigentliche Integrale. Rechenregeln: $\int p(x)+q(x)\, dx = \int p(x)\, dx + \int q(x)\, dx$ ||| $\int c\cdot q(x)\, dx = c\cdot\int q(x)\, dx$ ||| ${}_a\int^b + {}_b\int^c = {}_a\int^c$ (Intervalladditiv.)

<u>2. Lineare Algebra / Geometrie: Lineare Gleichungssysteme</u> d.h. Systeme mit 3 Gleichungen/3 Variablen oder 3Gl/2Var oder 3Gl/4Var etc. Dabei sollte man schon ein Gefühl für die möglichen Lösungsmengen haben: ein System mit mehr Variablen als Gleichungen kann z.B. nicht genau eine Lsg. haben (i.d.R. MUSS man Param. wählen)! Die drei Fälle (keine / genau eine / unendlich viele Lösungen) korrekt behandeln (Parameterwahl anständig notieren). Beachte: bei einem m×3-System müssen möglicherweise nicht nur ein, sondern sogar zwei verschiedene Param. gewählt werden. **Matrix-Vektor-Schreibweise** LGS müssen auch in Matrixform geschrieben und gelöst werden können. **Systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme** D.h. LGS müssen im Zweifelsfall auch von Hand gelöst werden können (Stichwort „Gauß-Verfahren"). Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn ein LGS mit Parametern auftaucht, bei dem der TR nichts nützt.
<u>Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte:</u> Geraden und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen. Standardskalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren:
Vektoren zeichnen und benennen können. Gängige Vokabeln „Ortsvektor", „Nullvektor", „Gegenvektor", „Stützvektor", „Richtungsvektor", „Spannvektor" kennen und benutzen können.
Rechnen mit Vektoren: Vektoren addieren (Vektor + Vektor = Vektor) oder mit einer Zahl multiplizieren (Zahl mal Vektor = Vektor) können. Grafische Interpretation dieser Rechenoperationen kennen. **<u>Skalarprodukt</u>** (Vektor mal Vektor = Zahl) berechnen können. Skalarprodukt gleich Null bedeutet: Vektoren stehen senkrecht aufeinander! Länge eines 3D-Vektors = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ggf. Kreuzprodukt (Vek. × Vek. = Vek.) zur Bestimmung eines zu zwei 3D-Vektoren senkrechten Vektors. Achtung: Die Bedeutung der Multiplikationsarten nicht verwechseln! Mittelpunkt und Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten.
Geradengleichungen: gibt's im 3D-Raum nur in Parameterform: xVek= Stützvek+ r·Richtungsvek. Wissen, dass man bei der Wahl eines beliebigen Wertes für r einen Punkt auf der Geraden erhält. Wenn r beschränkt ist (z.B. auf [2;3] hat man nur noch eine Strecke!) Parameter r kann als Zeitparameter zu verstehen sein; dann gilt oft: Länge des Richtungsvektors entspricht Geschwindigkeit.
Ebenengleichungen: Parameterform xVektor = Stützvektor + r·Spannvektor_1 + s·Spannvektor_2
Ein Vektor steht senkrecht zur Ebene, wenn er zu jedem Spannvek. senkrecht steht (Skalarprodukt!)
<u>Lagebeziehungen</u> im Raum: Bei Ebene-Ebene gibt's die Möglichkeiten Schnitt/parallel/identisch, bei Gerade-Ebene gibt's Schnitt/parallel/Gerade liegt in Ebene. Bei Gerade-Gerade gibt's Schnitt/parallel/windschief/identisch. Dies mit Hilfe von LGS lösen können.

<u>3. Stochastik: Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen // Binomialverteilung</u>
Grundlagen der Stochastik: Zufallsversuch, Unterschied Ergebnis/Ereignis. Idee Gegenereignis. Bäume erstellen können, Pfadregeln. Laplace-Versuch und Gleichverteilung. Formel für bedingte Wahrscheinlichkeit und 4-Feldertafel, Zufallsvariable (oder Zufallsgröße) ist eine Zuordnung von Ergebnissen zu Zahlen (z.B. „Kopf"→ „2 Bonbons Gewinn" und „Zahl" → „3 Bonbons Gewinn") Mittel- und Erwartungswert, Standardabweichung (für allg. Zufallsgrößen), Kombinatorik (Möglichkeiten aufzählen: Ziehung mit/ohne Zurücklegen, mit/ohne Reihenfolgenbeachtung).
Binomialverteilung: Idee Bernoulliversuch, Bernoulliformel $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$
mit Herleitung. Bernoulliformel mit konkreten Zahlen per Hand berechnen können. Mit dieser Formel aber auch mit den GTR-Befehlen BinomialPD und BinomialCD umgehen (auch Fragen nach n, k oder p damit beantworten!). Histogramme (Säulendiagramme) zeichnen und interpretieren können. Erwarungswert und Standardabweichung bei binomialverteilten Zufallsgrößen: $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (n-p)}$

(Stochastische Matrizen sind zwar Teil des Lehrplans, sind in den Abiturvorgaben aber nicht aufgeführt.)

Übergangsmatrizen/Stochastische Matrizen: Aus **Diagrammen eine Matrix** erstellen und umgekehrt. Sachzusammenhänge beachten. Eigenschaften einer stochastischen Matrix: genausoviele Zeilen wie Spalten, Spaltensumme immer gleich eins, die Einträge sind Übergangswahrscheinlichkeiten. Berechnung einer **Folgeverteilung**: Matrix mal Ausgangsverteilung = Folgeverteilung. Berechnung einer weiteren Folgeverteilung ist dann auch durch Matrix² mal Ausgangsverteilung möglich. Allgemeiner Ansatz für Bestimmung einer **stabilen Verteilung** : Matrix mal x = x (dann LGS lösen). Bestimmung der „**Vorverteilung**“: Matrix mal x = aktuelle_Verteilung (dann LGS lösen). Wissen, dass viele Matrizen **Grenzmatrizen** besitzen (Durch Mat A^{500} und Mat A^{501} testen). In diesem Fall gilt: Grenzmatrix mal Ausgangsverteilung = Grenzverteilung. Die Grenzverteilung ist auch eine stabile Verteilung!